Suites : Exercices
Avec correction

Exercice 1

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r.

1. On donne : $u_5 = 7$, $r = 2$.
Calculer u_1, u_{25} et u_{100}.
2. On donne : $u_3 = 12$, $u_8 = 0$.
Calculer r, u_0 et u_{18}.
3. On donne : $u_7 = \frac{7}{2}$, $u_{13} = \frac{13}{2}$.
Calculer u_0.

Exercice 2

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison q.

1. On donne : $u_1 = 3$ et $q = -2$.
Calculer u_4, u_8 et u_{12}.
2. On donne $u_3 = 2$ et $u_7 = 18$.
Calculer u_0, u_{15} et u_{20}.

Exercice 3

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_2 + u_3 + u_4 = 15$ et $u_6 = 20$.
Calculer son premier terme u_0 et sa raison r.

Exercice 4

Déterminer sept nombres impairs consécutifs dont la somme est 7^3.

Exercice 5

Existe-t-il une suite telle que les trois premiers termes u_0, u_1, u_2 soient à la fois en progression arithmétique et géométrique ?

Exercice 6

Soit (u_n) une suite telle que $u_4 = -4$ et $u_7 = \frac{1}{2}$.

1. On suppose que la suite (u_n) est arithmétique.
   a) Calculer u_3, u_5, u_0.
Plus généralement, exprimer u_n en fonction de u_p et de la raison r, pour n et p entiers quelconques.
   b) Calculer S_5 et S_{10}.
   c) Etudier la convergence de (u_n).

2. Mêmes questions si (u_n) est supposée géométrique.

Exercice 7

Une suite arithmétique u de raison 5 est telle que $u_0 = 2$ et, n étant un nombre entier, $\sum_{i=3}^{i=n} u_i = 6456$

Calculer n.

Exercice 8

Déterminer quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique sachant que leur somme est 12 et la somme de leurs carrés est 116.

Exercice 9

Une suite géométrique v est croissante et ses termes sont strictement négatifs.

1. Justifier que la raison b de la suite est telle que $0 < b < 1$.
2. On suppose que $v_1v_3 = \frac{4}{9}$ et $v_1 + v_2 + v_3 = -\frac{19}{9}$.

Calculer v_1, v_2, v_3 et b.

Exercice 10

Calculer les sommes S et S'.

$S = 2 + 6 + 18 + ... + 118\,098$

$S' = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2}{59049}$

Exercice 11

Une horloge sonne toutes les heures.

Quel est le nombre de sons de cloche entendus en 24 heures ?

Exercice 12

Cinq personnes se trouvent dans une pièce. L'une d'entre elles remarque que leurs âges sont en progression arithmétique. Sachant que la somme des carrés de leurs âges est égale à l'année où se passe cette histoire (à savoir 1980) et qu'à elles toutes, les personnes totalisent 90 années, quel est l'âge de chacune des personnes ?

Exercice 13

La taille d'un nénuphar double chaque jour. Au bout de 40 jours, il a recouvert tout l'étang. Au bout de combien de jours avait-il recouvert la moitié de l'étang ?

Exercice 14

Au cours d'une bourse aux livres, un manuel scolaire perd chaque année 12% de sa valeur. Un livre a été acheté neuf en 1985, il coûtait alors 150F. Quel est son prix à la bourse aux livres de 1990 ? de 1995 ?

Exercice 15

On cherche à calculer l'aire A de la surface comprise entre la portion de parabole d'équation $y = -x^2 + 1$ et les axes du repère (voir figure).

Pour cela, on divise [0,1] en n parties égales et l'on remarque que A est comprise entre l'aire A_n de la région délimitée en noir et l'aire A'_n de la région délimitée en rouge.

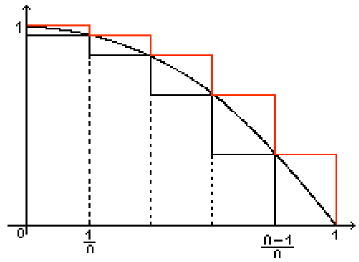
a) Calculer A_n et A'_n en fonction de n.

(On admettra la formule : $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

b) Calculer A_n et A'_n pour $n = 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^{10}$ à l'aide d'une calculatrice.

Quel résultat semble se dégager ?

c) Prouver ce résultat et en déduire la valeur de A.



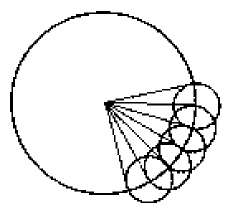
Exercice 16 - Une rosace

On partage un cercle de rayon 1 en n parties égales et on dessine une rosace comme sur la figure ci-après .
Soit l_n la somme des périmètres des petits cercles tracés et soit s_n la somme des aires des petits disques tracés.

On se demande si :

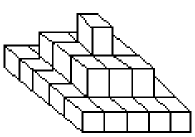
- l_n va tendre vers 0 car les cercles sont de plus en plus petits ;
- l_n va tendre vers $+\infty$ car il y a de plus en plus de cercles ;
- l_n va tendre vers une valeur finie.

Trouver le bon résultat par le calcul et faire le même travail pour s_n.
(On admettra que pour $x \geqslant 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$).



Exercice 17 - La pyramide de Saqqarah

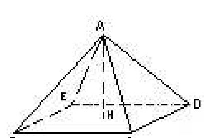
On considère une pyramide à n étages et on appelle p_n le nombre de cubes qui la composent.

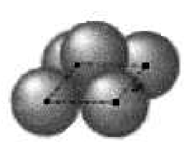


a) Trouver une formule donnant p_n comme une somme de n carrés entiers.
Soit $S_n = 0 + 1 + 4 + 9 + ... + n^2$.
b) Exprimer p_n en fonction de S_{2n-1} et S_{n-1}.
c) Calculer S_0, S_1, S_2, S_3. Trouver un polynôme P de degré 3,
tel que $P(n) = S_n$ pour $n \leqslant 3$.
On admet que pour tout n, $P(n) = S_n$.
d) En utilisant b , exprimer p_n sous forme de polynôme.
e) Application numérique :
la pyramide de Saqqarah à 6 étages. Calculer p_n.

Exercice 18 - Empilements de billes

a) Soit ABCDE une pyramide à base carrée ayant toutes ses arêtes égales (AD = a).
Calculer la hauteur AH de cette pyramide.





b) On empile des billes de même rayon R de telle sorte que chaque bille repose sur quatre billes dont les centres définissent un carré de côté 2R. Le niveau 1 contient une bille, le niveau 2 contient quatre billes.
Quel est le nombre de billes du niveau 3, du niveau 4, du niveau n (n entier naturel) ?
c) On note h_n la hauteur d'un empilement à n niveaux. Démontrez que (h_n) est une suite arithmétique et donnez le premier terme et la raison.

Exercice 19
Montrer que chaque suite proposée a pour limite ℓ.
a) $u_n = \dfrac{1}{n+3}$, $\ell = 0$ et $v_n = \dfrac{2}{n^2}$, $\ell = 0$
b) $u_n = n^2 + 1$, $\ell = +\infty$ et $v_n = 2n^3$, $\ell = +\infty$
c) $u_n = -\sqrt{n}$, $\ell = -\infty$ et $v_n = -n - 4$, $\ell = -\infty$
d) $u_n = \dfrac{2}{n^2+5}$, $\ell = 0$ et $v_n = n + \dfrac{1}{n}$, $\ell = +\infty$
e) $u_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 2}{1-n}$, $\ell = -\infty$ et $v_n = \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n}$, $\ell = 0$
f) $u_n = \dfrac{2n}{n+1}$, $\ell = 2$ et $v_n = -n - 4$, $\ell = -\infty$

Exercice 20
Montrer que les suites proposées tendent vers une limite à préciser.
a) $u_n = \dfrac{3}{2\sqrt{n}+7}$; $v_n = \dfrac{n-1}{n^2+1}$; $w_n = \dfrac{n^2-1}{2n^2+n}$
b) $u_n = \dfrac{2\sqrt{n}}{3n^2+4}$; $v_n = -n^2 - n + 1$; $w_n = \dfrac{-2n+1}{4n+1}$
c) $u_n = (2n+1)^2$; $v_n = -n - \dfrac{3}{n}$; $w_n = \dfrac{4n^2+1}{n(2n+1)}$

Exercice 21
Etudier d'abord la limite de la suite géométrique (u_n), puis celle de la suite (v_n).
a) $u_n = 2^n$; $v_n = 1 + \dfrac{1}{2^n}$
b) $u_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$; $v_n = \dfrac{1}{7}n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$
c) $u_n = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$; $v_n = 7 + \dfrac{5}{3}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$
d) $u_n = -5^n$; $v_n = 2 - 5^n$

Exercice 22
Montrer que la suite (u_n) satisfait la relation (R), puis en déduire la limite de cette suite.
a) $u_n = \dfrac{\cos n}{n+1}$; (R) : $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$
b) $u_n = \sin(2n) + n$; (R) : $|u_n| \geqslant n - 1$
c) $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n^2+1}$; (R) : $|u_n| \leqslant \dfrac{n+1}{n^2+1}$
d) $u_n = \dfrac{(-1)^n + n}{(-1)^n + 2}$; (R) : $|u_n| \geqslant \dfrac{n-1}{3}$

Exercice 23
a) Vérifier que la suite $\left(\dfrac{4^n}{n^2}\right)$ est croissante.
b) En déduire que $\left(\dfrac{4^n}{n}\right)$ tend vers $+\infty$.
c) Déterminer la limite de $\left(\dfrac{4^n + n}{4^n + 2n}\right)$.

Exercice 24

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier le comportement à l'infini de la suite (u_n), en utilisant des majorations ou des minorations.

a) $u_n = \dfrac{n+1}{n^2+2}$

b) $u_n = \dfrac{2n+3}{3n-4}$

c) $u_n = \dfrac{(-1)^n \sin n}{n^2-1}$

d) $u_n = \dfrac{n^2+4}{n-1}$

e) $u_n = \dfrac{2n^2-3n+2}{1-n}$

f) $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2^n}$

Exercice 25

En utilisant les opérations sur les limites, déterminer le comportement à l'infini de la suite (u_n) dans chacun des cas ci-dessous :

a) $u_n = \dfrac{4n-1}{n+4}$

b) $u_n = \dfrac{2n^2-5n+3}{n+4}$

c) $u_n = \dfrac{n+3}{n^2+4}$

d) $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + \dfrac{n}{n+1}$

e) $u_n = \dfrac{2^n+n}{3^n(n+1)}$

Exercice 26

Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}$.

a) Déterminer les cinq premiers termes de cette suite. Quel semble être la limite de (u_n) ?

b) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n^2 - 4$ est géométrique.

En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

Exercice 27

Soit la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{u_n+2}$.

a) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

b) Montrer par récurrence que pour tout n de N, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

c) Résoudre l'inéquation $-x^2 + x + 2 \geqslant 0$.

Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n . Déduire de ce qui précède que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout entier n. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

d) Montrer que pour tout n, $|u_{n+1}-2| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n-2|$.

En déduire que pour tout n, $|u_n-2| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0-2|$.

Que peut-on en conclure sur la convergence de la suite (u_n) ?

Exercice 28

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 \geqslant -3 \\ u_{n+1} = \sqrt{3+u_n} \end{cases}$

a) Prenons $u_0 = 0$. Constater, à l'aide d'une calculatrice, que (u_n) semble converger vers une valeur l dont on donnera une valeur approchée)

V´erifier la mˆeme propri´et´e en choisissant une autre valeur initiale u_0.

b) Quelle valeur de u_0 faut-il prendre pour que la suite (u_n) soit stationnaire ?
c) Nous allons maintenant prouver que (u_n) converge bien vers ℓ.
Montrer que $(u_{n+1}-\ell)(u_{n+1}+\ell)=u_n-\ell$ pour tout entier n.
En déduire que $|u_{n+1}-\ell|\leqslant\dfrac{|u_n-\ell|}{\ell}$ puis que $|u_n-\ell|\leqslant\dfrac{|u_0-\ell|}{\ell^n}$ et conclure.

Correction

Exercice 1

Rappels :
Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.
Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tous entiers naturels n et p, $u_n = u_p + (n-p)r$

1. On a :
$u_5 = u_1 + (5 - 1)r$, donc $u_1 = u_5 - 4r = 7 - 4 \times 2 = 7 - 8 = -1$
Donc : $\mathbf{u_1 = -1}$

$u_{25} = u_5 + (25 - 5)r = 7 + 20 \times 2 = 7 + 40 = 47$
Donc : $\mathbf{u_{25} = 47}$

$u_{100} = u_5 + (100 - 5)r = 7 + 95 \times 2 = 7 + 190 = 197$
Donc : $\mathbf{u_{100} = 197}$

2. On a :
$u_8 = u_3 + (8 - 3)r = u_3 + 5r$, donc : $0 = 12 + 5r$
soit : $\mathbf{r = -\frac{12}{5}}$

$u_3 = u_0 + 3r$, donc $u_0 = u_3 - 3r = 12 - 3 \times -\frac{12}{5} = \frac{60}{5} + \frac{36}{5} = \frac{96}{5}$
Donc : $\mathbf{u_0 = \frac{96}{5}}$

$u_{18} = u_0 + 18r = \frac{96}{5} + 18 \times \left(-\frac{12}{5}\right) = \frac{96}{5} - \frac{216}{5} = -\frac{120}{5} = -24$
Donc : $\mathbf{u_{18} = -24}$

3. On a :
$u_7 = u_0 + 7r$, donc $r = \frac{u_7 - u_0}{7}$
De plus, $u_{13} = u_0 + 13r$, donc $u_{13} = u_0 + 13 \times \frac{u_7 - u_0}{7}$, donc :
$7u_{13} = 7u_0 + 13(u_7 - u_0)$
$7u_{13} = 7\ u_0 + 13u_1 - 13u_0$
$7u_{13} = -6u_0 + 13u_7$
$u_0 = \frac{7u_{13} - 13u_7}{-6} = \frac{7 \times \frac{13}{2} - 13 \times \frac{7}{2}}{-6}$
Donc : $\mathbf{u_0 = 0}$

Exercice 2

Rappels :
Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n$
Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors pour tous entiers naturels n et p, $u_n = u_p\ q^{n-p}$

1. On a :
$u_4 = u_1\ q^{4-1} = u_1\ q^3 = 3 \times (-2)^3 = 3 \times (-8) = -24$
Donc : $\mathbf{u_4 = -24}$

$u_8 = u_1\ q^{8-7} = u_1\ q^7 = 3 \times (-2)^7 = 3 \times (-128) = -384$
Donc : $\mathbf{u_8 = -384}$

$u_{12} = u_1\ q^{12-1} = u_1\ q^{11} = 3 \times (-2)^{11} = 3 \times (-2\,048) = -6\,144$
Donc : $\mathbf{u_{12} = -6\,144}$

2. Déterminons q :
$u_7 = u_3\ q^4$, donc $q^4 = \dfrac{u_7}{u_3} = \dfrac{18}{2} = 9$.
Donc $q^2 = 3$. On a alors deux possibilités pour la raison q : $q = -\sqrt{3}$ ou $q = \sqrt{3}$.

• Si $q = -\sqrt{3}$, alors :
$u_3 = u_0\ q^3$, donc $u_0 = \dfrac{u_3}{q^3} = \dfrac{2}{\left(-\sqrt{3}\right)^3}$
$u_0 = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$
$u_{15} = u_0\ q^{15} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \times \left(-\sqrt{3}\right)^{15} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \times 3^7 \times \left(-\sqrt{3}\right)^{2\times7+1}$
$= -\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \times 3^7 \times 3^7 \times \left(-\sqrt{3}\right)$
$= \dfrac{2 \times 3 \times 3^7}{3^2}$
$= 2 \times 3^6 = 1\,458$

$u_{20} = u_0\ q^{20} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \times \left(-\sqrt{3}\right)^{20} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \times \left(-\sqrt{3}\right)^{2\times10} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \times 3^{10}$
$= -\dfrac{2\sqrt{3}\times 3^{10}}{3^2} = -2\sqrt{3}\times 3^8 = -13\,122\sqrt{3}$
Donc : si $q = -\sqrt{3}$, alors $u_0 = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, $u_{15} = 1\,458$ et $u_{15} = -13\,122\sqrt{3}$

• Si $q = \sqrt{3}$, alors :
$u_3 = u_0\ q^3$, donc $u_0 = \dfrac{u_3}{q^3} = \dfrac{2}{\left(\sqrt{3}\right)^3} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$
$u_{15} = u_0\ q^{15} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \times \left(\sqrt{3}\right)^{15} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \times 3^7 \times \left(\sqrt{3}\right)^{2\times7+1}$
$= \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \times 3^7 \times 3^7 \times \sqrt{3}$
$= \dfrac{2 \times 3 \times 3^7}{3^2}$
$= 2 \times 3^6 = 1\,458$

$u_{20} = u_0\ q^{20} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \times \left(\sqrt{3}\right)^{20} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \times \left(\sqrt{3}\right)^{2\times10} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \times 3^{10}$
$= \dfrac{2\sqrt{3}\times 3^{10}}{3^2} = 2\sqrt{3}\times 3^8 = 13\,122\sqrt{3}$
Donc : si $q = \sqrt{3}$, alors $u_0 = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, $u_{15} = 1\,458$ et $u_{20} = 13\,122\sqrt{3}$

Exercice 3

(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, donc :
$u_2 = u_0 + 2r$, $u_3 = u_0 + 3r$, $u_4 = u_0 + 4r$ et $u_6 = u_0 + 6r$.
On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_6 = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} 3u_0 + 9r = 15 \\ u_0 + 6r = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 + 3r = 5 \\ u_0 + 6r = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = 5 - 3r \\ u_0 = 20 - 6r \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = 5 - 3r \\ 5 - 3r = 20 - 6r \end{cases} \iff$$
$$\begin{cases} u_0 = 5 - 3r \\ r = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = -10 \\ r = 5 \end{cases}$$

D'où : $u_0 = -10$ et $r = 5$.
Pour tout entier naturel n, $u_n = -10 + 5n$.

Exercice 4

Déterminons sept nombres impairs consécutifs dont la somme est 7^3 :

La suite des impairs peut être notée : $u_n = 2n + 1$, pour tout entier n.

On cherche donc l'entier p (et u_p) tel que : $u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + ... + u_{p+6} = 7^3 = 343$.

Or, $u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_{p+6} = (2p + 1) + (2p + 3) + ... + (2p + 13) = 7 \times 2p + (1 + 3 + 5 + ... + 13$.

Or, $1 + 3 + 5 + ... + 13 = 7\left(1 + \dfrac{6 \times 2}{2}\right) = 49$, somme des 7 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.

Ainsi : $14p + 49 = 7^3 = 343$, soit $p = 21$; puis $u_p = 43$.

D'où : les sept nombres recherchés sont : 43, 45, 47, 49, 51, 53 et 55.

Exercice 5

Déterminons s'il existe une suite telle que les trois premiers termes u_0, u_1, u_2 soient à la fois en progression arithmétique et géométrique :

Si ces trois termes sont en progression arithmétique, alors il existe un réel r tel que : $u_1 = u_0 + r$ et $u_2 = u_1 + r$.

De même, s'ils sont en progression géométrique, alors il existe un réel q non nul tel que : $u_1 = u_O q$ et $u_2 = u_1 q$.

On obtient alors le système à deux équations et deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} u_0 \times q = u_0 + r \\ u_0 \times q^2 = u_0 + 2r \end{cases} \quad \text{ou encore :} \begin{cases} u_0(q-1) = r \\ \dfrac{u_0(q^2-1)}{2} = r \end{cases}$$

Résolvons l'équation $q - 1 = \dfrac{q^2 - 1}{2}$:

$2q - 2 = q^2 - 1$

$q^2 - 2q + 1 = 0$

$(q - 1)^2 = 0$

$q = 1$

Cette équation admet une unique solution 1.

Donc : $u_0 = u_1 = u_2$

D'où : les seules suites dont les trois premiers termes sont en progression géométriques et arithmétiques sont les suites constantes.

Exercice 6

1. a) $u_7 = u_4 + 3r$, la raison r vaut donc : $r = \dfrac{3}{2} = 1,5$

Donc : $u_3 = -5,5$; $u_5 = -2,5$; $u_0 = -10$.

$u_n = u_p + \dfrac{3(n-p)}{2}$.

1. b) $S_5 = u_0 + u_1 + ... + u_5 = 6\left[u_0 + \dfrac{5r}{2}\right] = -\dfrac{75}{2}$

$S_{10} = u_0 + u_1 + ... + u_{10} = 11\left[u_0 + \dfrac{10r}{2}\right] = -\dfrac{55}{2}$

1. c) (u_n) est une suite arithmétique de raison positive, donc elle converge vers l'infini.

2. $u_7 = u_4\ q^3$; soit $q^3 = \dfrac{u_7}{u_4} = -\dfrac{1}{8}$; on en déduit $q = -\dfrac{1}{2}$. Puis $u_3 = 8$; $u_5 = 2$; $u_0 = -64$; $u_n = \dfrac{u_p}{(-2)^{n-p}}$.

$S_5 = u_0 \times \dfrac{1 - q^6}{1 - q} = 42$ et $S_{10} = u_0 \times \dfrac{1 - q^11}{1 - q} = \dfrac{341}{8} = 42,625$.

(u_n) est une suite géometrique de raison $|q| < 1$, donc elle converge vers 0.

Exercice 7

$S_n = u_3 + ... + u_n = (n-2)\left[u_3 + \frac{(n-3)r}{2}\right]$, $u_3 = 2 + 3 \times 5 = 17$

On cherche donc n tel que : $(n-2)\left(17 + \frac{5(n-3)}{2}\right) = 6456$; soit encore : (n - 2)(5n + 19) = 12 912. Il faut donc trouver les racines du polynôme $5n^2 + 9n - 12950 = 0$:

$n_1 = \frac{-9-509}{10} = 51,8$ qui n'est pas un entier ! et $n_2 = \frac{-9+509}{10} = 50$

Exercice 8

Soit (u_n) une telle suite de premier terme u_0 et de raison r.

Il existe k tel que : $u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} = 12$ et $u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 + u_{k+3}^2 = 116$

Or : $u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} = 4u_k + 6r$ et $u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 + u_{k+3}^2 = u_k^2 + (u_k+r)^2 + (u_k+2r)^2 + (u_k+3r)^2$

$u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 + u_{k+3}^2 = 4u_k^2 + 12u_kr + 14r^2$

$u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 + u_{k+3}^2 = (2u_k + 3r)^2 + 5r^2$

Or $4u_k + 6r = 12$ donc $2u_k + 3r = 6$

Ainsi : $6^2 + 5r^2 = 116$

Soit : $r = \pm 4$

Puis $2u_k + 3r = 6$ donc $u_k = -3$ ou $u_k = 9$

Ainsi : -3 , 1 , 5 , 9 conviennent ainsi que : 9 , 5 , 1 , -3.

Exercice 9

Si (v_n) est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison b, alors pour tout entier n : $v_n = v_0 b^n$.

1. Si (v_n) est croissante et ses termes sont strictement négatifs alors $0 < \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, c'est-à-dire $0 < b < 1$.

2. $v_1v_3 = v_1^2\, b^2$ et $v_1 + v_2 + v_3 = v_1\frac{1-b^3}{1-b}$; $1 - b^3 = (1 - b)(1 + b + b^2)$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} v_1^2 b^2 = \frac{4}{9} \\ v_1(1+b+b^2) = -\frac{19}{9} \end{cases} \text{ soit encore : } \begin{cases} v_1 b = \pm\frac{2}{3} \\ \pm\frac{2(1+b+b^2)}{3b} = -\frac{19}{9} \end{cases}$$

Soit $6b^2 + 25b + 6 = 0$ ou $6b^2 - 13b + 6 = 0$

La première équation a deux solutions négatives (cf première questions)

Donc $b = \frac{2}{3}$.

$v_1 = -1$; $v_2 = -\frac{2}{3}$; $v_3 = -\frac{4}{9}$.

Exercice 10

S = 2 + 6 + 18 + ... + 118 098

S est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3.

$u_0 = 2$; $u_1 = 2 \times 3$; $u_2 = 2 \times 3^2$ ... $118\,098 = 2 \times 59\,049 = 2 \times 3^{10}$.

$S = u_0 + u_1 + ... + u_10 = u_0\frac{1-3^{11}}{1-3} = 177\ 146.$

$S' = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + ... + \frac{2}{59049}$

S' est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{1}{3}$.

De plus : $59049 = 3^{10}$. Donc $S' = 2\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{177\ 146}{59\ 049}$.

Exercice 11

1 + 2 + 3 + ... + 12 + 1 + 2 + ... + 12 = 2(1 + 2 + ... + 12).

Somme des 12 premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1 : $1+2+...+12 = \dfrac{12\times 13}{2} = 78$

Donc en 24 heures la pendule aura sonné (2×78) fois, soit **156 fois**.

Exercice 12

Soit u_0 l'âge de la plus jeune personne. L'âge des autres personnes sont respectivement : u_1, u_2, u_3 et u_4 ; avec $u_1 = u_0 + r$, ...

On a donc :

$u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1980$ et $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 90$

Pour la résolution, cf exercice 8 : 6 ans, 12 ans, 18 ans, 24 ans et 30 ans.

Exercice 13

Soit u_0 la taille du nénuphar le jour 0. Au bout d'un jour il mesure $u_1 = 2u_0$, ... ; au bout de 40 jours il mesure $u_{40} = u_0 2^{40}$.

On cherche l'entier p tel que $u_p = u_0 \times 2^p = \dfrac{u_{40}}{2}$.

On obtient facilement p = 39.

Exercice 14

En 1985 le prix du livre est $u_0 = 150$. En 1986 il vaut : $u_1 = 150 \times 0{,}88$, ... ; en 1990 (donc 5 ans après), il vaut : $u_5 = 150 \times 0{,}88^5 = 79{,}2$ F.

Et en 1995, il ne vaut plus que : $u_{10} = 150 \times 0{,}88^{10} = 41{,}8$ F.

Exercice 15

a) An, l'aire inférieure, est délimitée par des rectangles de largeur $\dfrac{1}{n}$ et de longueur $f\left(\dfrac{k}{n}\right)$. Donc :$A_n = \dfrac{1}{n}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right) + f\left(\dfrac{2}{n}\right) + ... + f(1)\right]$

$f\left(\dfrac{1}{n}\right) + f\left(\dfrac{2}{n}\right) + ... + f(1) = n - \dfrac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^2}$

Ainsi $A_n = \dfrac{1}{n}\left[n - \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right] = 1 - \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \dfrac{4n^2-3n-1}{6n^2}$

$A'_n = \dfrac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\dfrac{1}{n}\right) + ... + f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right]$

$A'_n = 1 - \dfrac{1}{n^3} \times \dfrac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6}$

$A'_n = \dfrac{4n^2+3n-1}{6n^2}$

c) pour tout n, $A_n < A < A'_n$.

Et quand n tend vers l'infini, A_n et A'_n tendent vers $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$; donc $A = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 16

Il y a n cercle de rayons r_n. Calculons ce rayon : l'angle au centre de chaque portion est $\dfrac{2\pi}{n}$ et le rayon du cercle initial est 1. On applique le théorème d'Al Kashi qui nous donne : $r_n^2 = 2\left(1-\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)\right) = 4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

D'où : $r_n = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

$l_n = n \times 4\pi \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

Or, grâce à l'inégalité proposée on obtient : $\dfrac{\pi}{n} - \dfrac{\left(\dfrac{\pi}{n}\right)^3}{6} \leqslant \sin\dfrac{\pi}{n} \leqslant \dfrac{\pi}{n}$

Soit : $\frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{6n^3} \leqslant \sin\frac{\pi}{n} \leqslant \frac{\pi}{n}$

Donc : $4\pi^2 - \frac{2\pi^4}{3n^3} \leqslant l_n \leqslant 4\pi^2$ qui nous permet de conclure que l_n tend vers $4\pi^2$ quand n tend vers l'infini.

$a_n = n \times \pi \left(2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2$; avec l'inégalité on peut conclure que la somme des aires tend vers 0.

Exercice 17

a) $p_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2$

b) $p_n = S_{2n-1} - 4S_{n-1}$.

c) $p(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$

d) $p_n = P(2n - 1) - 4P(n - 1)$; $p_n = \frac{4n^3 - n}{3} = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

e) Pour $n = 6$, $p_6 = \frac{6 \times 11 \times 13}{3} = \boxed{286}$

Donc le nombre de cubes utilisés est de **286**.

Exercice 18

a) AHD triangle rectangle en H. [HD] est une demi-diagonale de carré.

HD $= \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Puis AH $= \frac{a}{\sqrt{2}}$.

b) Niveau 3 : 9 billes ; Niveau 4 : 16 billes ; .... Niveau n : n^2 billes.

c) $h_n = n\frac{R}{\sqrt{2}}$

Exercice 19

a) $\lim_{n\to+\infty}(n+3) = +\infty$ et $\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

De même : $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

b) $+\infty + 1 = +\infty$; donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

c) $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$; donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

d) $\lim_{n\to+\infty}(n^2+5) = +\infty$ et $\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} n + \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = +\infty + 0 = +\infty$

e) Au numérateur on a déjà une forme indéterminée. Remarquons que $2n^2 - 3n + 2 = 1 - (1-n)(2n-1)$.

Ainsi $u_n = \frac{1}{1-n} - (2n-1)$

et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-n} - \lim_{n\to+\infty}(2n-1) = 0 - (+\infty) = -\infty$.

Pas de difficulté pour v_n.

f) Forme indéterminée : le numérateur et le dénominateur tendent vers l'infini ; il va donc falloir factoriser par n le dénominateur : $u_n = \frac{2n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$.

Or : $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$; donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Exercice 20

a) $u_n = \dfrac{3}{2\sqrt{n}+7}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

$\mathrm{v_n}$ est une forme indéterminée, factorisons par n le numérateur et le dénominateur : $v_n = \dfrac{n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(n+\dfrac{1}{n}\right)} = \dfrac{1-\dfrac{1}{n}}{n+\dfrac{1}{n}}$. Le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers l'infini. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Même méthode pour $\mathrm{w_n}$: factoriser le numérateur et le dénominateur par n^2. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\dfrac{1}{2}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$.

Exercice 21

a) $(\mathrm{u_n})$ est une suite géométrique de raison $\mathrm{q} = 2$, $\mathrm{q} > 1$ donc la suite tend vers l'infini : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; puis $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

b) $(\mathrm{u_n})$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$, $|\mathrm{q}| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

c) $(\mathrm{u_n})$ est une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{4}$, $|\mathrm{q}| < 1$ donc la suite converge vers 0 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 7$.

d) $(\mathrm{u_n})$ est une suite géométrique de raison $\mathrm{q} = 5$, $\mathrm{q} > 1$ donc la suite tend vers l'infini : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$; puis $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Exercice 22

a) Pour tout n, $|\cos(n)| \leqslant 1$; donc $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Donc : $0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

b) Pour tout n, $\sin(2n) \geqslant -1$, donc $u_n \geqslant n-1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c) $|u_n| = \dfrac{|n+(-1)^n|}{|n^2+1|} \leqslant \dfrac{n+1}{n^2+1}$. On en déduit : $0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1} = 0$, soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

d) $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc $-1+n \leqslant (-1)^n + n \leqslant 1+n$ et $1 \leqslant (-1)^n + 2 \leqslant 3$, soit : $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{(-1)^n+2} \leqslant 1$ et $\dfrac{n-1}{3} \leqslant u_n \leqslant n+1$.

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{3} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 23

a) Posons $u_n = \dfrac{4^n}{n^2}$.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{4^n}{n^2(n+1)^2}(3n^2-2n-1)$.

Pour étudier le signe de cette différence, il suffit donc d'étudier celui du facteur $(3n^2-2n-1)$ (montrer qu'il est positif pour $n \geqslant 3$).

b) $\dfrac{4^n}{n} \geqslant \dfrac{4^n}{n^2}$[/b] et la suite $(\mathrm{u_n})$ définie précédemment est croissante et non majorée donc converge vers l'infini ; ainsi la suite $v_n = \dfrac{4^n}{n}$ tend vers l'infini.

c) $\dfrac{4^n+n}{4^n+2n} = \dfrac{4^n\left(1+\dfrac{n}{4^n}\right)}{4^n\left(1+2\dfrac{n}{4^n}\right)} = \dfrac{1+\dfrac{n}{4^n}}{1+2\dfrac{n}{4^n}}$, et grâce à b) , on peut conclure que cette limite est 1.

Exercice 24

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{3}$c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$d) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$e) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$f) (u_n) n'admet pas de limite.

Exercice 25

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0+1 = 1$

e) $u_n = \dfrac{2^n\left(1+\dfrac{n}{2^n}\right)}{3^n(1+n)} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \times \dfrac{1+\dfrac{n}{2^n}}{1+n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3} < 1$) et le deuxième terme tend également vers 0 ; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 26

a) **Déterminons les cinq premiers termes de cette suite :**

$u_0 = 0$

$u_1 = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{u_0^2+12} = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{0+12} = \dfrac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$

$u_2 = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{u_1^2+12} = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+12} = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{15} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$

$u_3 = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{u_2^2+12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{15}{4}+12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{63}{4}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{4}$

$u_4 = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{u_3^2+12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{9\times 7}{16}+12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{255}{16}} = \dfrac{\sqrt{255}}{8}$

La suite (u_n) semble converger vers 2.

b) Pour tout entier naturel n, on a :

$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4 = \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}\right)^2 - 4 = \dfrac{1}{4}(u_n^2+12) - 4$

$= \dfrac{1}{4}u_n^2 + 3 - 4$

$= \dfrac{1}{4}(u_n^2 - 4)$

$= \dfrac{1}{4}v_n$

On en conclut que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

La raison $\dfrac{1}{4} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n^2 - 4$, donc $u_n = \sqrt{v_n+4}$ (tous les termes de (u_n) sont positifs).

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{4} = 2$

Exercice 27

a) $u_1 = 1{,}667$; $u_2 = 1{,}909$; $u_3 = 1{,}977$; $u_4 = 1{,}994$; $u_5 = 1{,}999$.

b) Hypothèse de récurrence : "$0 \leqslant u_n \leqslant 2$".
La proposition est vraie pour n = 0, n = 1, ..., n = 5.
Supposons la vraie au rang p : $0 \leqslant u_p \leqslant 2$. Alors :

$$\frac{3u_p + 2}{u_p + 2} \geqslant 0 \text{ et } u_{p+1} - 2 = \frac{3u_p + 2}{u_p + 2} - 2 = \frac{3u_p + 2 - 2u_p - 4}{u_p + 2} = \frac{u_p - 2}{u_p + 2} \leqslant 0$$

donc : $0 \leqslant u_{p+1} \leqslant 2$
La proposition est alors vérifiée au rang (p + 1).
On en conclut que la proposition est vraie pour tout entier n : u_n est bornée par 0 et 2.

c) L'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2 + x + 2 \geqslant 0$ est l'intervalle $\mathcal{S} = [-1\ ;\ 2]$.
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 2}$. Le numérateur est positif car pour tout n, $u_n \in \mathcal{S}$, et le dénominateur est positif car u_n est positif pour tout n. Donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. On en conclut que la suite (u_n) est croissante.

d) $|u_{n+1} - 2| = \dfrac{|u_n - 2|}{|u_n + 2|}$; or pour tout n : $u_n + 2 \geqslant 2$, donc $\dfrac{1}{u_n + 2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $|u_{n+1} - 2| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - 2|$.

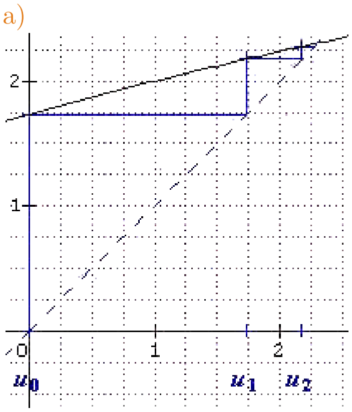
Alors $|u_n - 2| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$.

$|u_0 - 2| = 1$, donc pour tout n : $|u_{n+1} - 2| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison < 1)
On en déduit que $u_n - 2$ tend vers 0 puis u_n tend vers 2.

Exercice 28

a)



(u_n) semble converger vers 2,3.
De même en choisissant une valeur intiale $u_0 \geqslant -3$

b) (u_n) est une suite stationnaire si pour tout n : $u_{n+1} = u_n = u_0$, c'est-à-dire si : $u_0 = \sqrt{3 + u_0}$ ou encore : $u_0^2 - u_0 - 3 = 0$. Ce polynôme a deux racines, dont une dans l'intervalle [-3 ;+∞[: $u_0 = \dfrac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

c) $(u_{n+1} - \ell)(u_{n+1} + \ell) = u_{n+1}^2 - \ell^2 = 3 + u_n - \ell^2$.
Or $\ell^2 = 3 + \ell$ donc $3 - \ell^2 = -\ell$; ainsi : $(u_{n+1} - \ell)(u_{n+1} + \ell) = u_n - \ell$, pour tout entier n.
On en déduit que : $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{|u_n - \ell|}{|u_{n+1} + \ell|}$ et $|u_{n+1} + \ell| \geqslant \ell$ donc $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{|u_n - \ell|}{\ell}$ et par récurrence :
$|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{|u_0 - \ell|}{\ell^n}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Ainsi : $|u_n - \ell|$ tend vers 0 et donc u_n tend vers ℓ.