Terminale S

## Suites | Exercices corrigés


1. 1. QCM 1
1. 2. Fesic 2002 Exercice 10 1
1. 3. Fesic 2004 Exercice 9 2
1. 4. Fesic 2004 Exercice 10 2
1. 5. Fesic 2004 Exercice 11 3
1. 6. Fesic 2004 Exercice 12 4
1. 7. QCM divers 5
1. 8. ROC+exemples, France 2005 6
1. 9. Récurrence 1, France 2004 7
1. 10. Récurrence 2, Pondicherry 2004 8
1. 11. Récurrence 3, Amérique du Nord 2005 8
1. 12. Suite homographique, N. Calédonie 06/2008 12
1. 13. Suite récurrente, France rempl t 2007 14
1. 14. Barycentre 1, N. Caledonie 2005 16
1. 15. Barycentre 2, N. Calédonie 2004 17
1. 16. Une exponentielle, Pondicherry 2005 18
1. 17. Formule de Stirling 19
1. 18. Suites adjacentes, Antilles 2004 21
1. 19. Suites adjacentes : calcul de la racine carrée 22
1. 20. Suites adjacentes : aire sous une courbe 24
1. 21. Suites adjacentes : le principe de la dichotomie 29
1. 22. Ln et méthode de Newton-Raphson, Asie 2000 30
1. 23. ROC+suite solution équation, Polynésie 2005 33


### 1. 1. QCM

Répondez par VRAI ou FAUX en JUSTIFIANT (sauf la question f. où il « suffit » de prouver).

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q \in\ ]0\ ;+\infty[$.
On note $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
Alors

a. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 2000$, alors $q > 1$.

b. Si $q < 1$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n < 2$.

c. Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

d. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$, alors $q = \dfrac{1}{2}$.

e. Si $q = 2$, alors $S_4 = 15$.

f. Démontrer par récurrence que $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2$.

**Correction**

a. Vrai, b. Vrai, c. Vrai, d. Vrai, e. Faux.

### 1. 2. Fesic 2002 Exercice 10

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n .$$

On définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

a. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

b. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \dfrac{3}{5}(w_n - v_n)$.

d. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite finie.

**Correction**

a. **Faux** : Si la suite $v_n$ est arithmétique, $v_{n+1}-v_n$ est constante :

$$v_{n+1}-v_n=(u_{n+2}-u_{n+1})-(u_{n+1}-u_n)=\frac{1}{3}u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n-2u_{n+1}+u_n=-\frac{5}{3}u_{n+1}+\frac{5}{3}u_n=-\frac{5}{3}v_n\ ;$$

c'est donc faux, mais nous gagnons une information intéressante : $v_{n+1}=-\frac{5}{3}v_n+v_n=-\frac{2}{3}v_n$ ; $v_n$ est géométrique de raison $-\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0=1-0=1$ d'où $v_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

b. **Vrai :** Recommençons :

$w_{n+1}-w_n=u_{n+2}+\frac{2}{3}u_{n+1}-u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n=\frac{1}{3}u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n+\frac{2}{3}u_{n+1}-u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n=0$ donc c'est vrai. En plus on a $w_n=w_0=u_1+\frac{2}{3}u_0=1$.

c. **Vrai :** $\frac{3}{5}(w_n-v_n)=\frac{3}{5}\left(u_{n+1}+\frac{2}{3}u_n-u_{n+1}+u_n\right)=\frac{3}{5}\left(\frac{5}{3}u_n\right)=u_n$. Ok !

d. **Faux :** Remplaçons pour calculer $u_n$ : $u_n=\frac{3}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$ dont la limite est $\frac{3}{5}$.

<u>1. 3. Fesic 2004 Exercice 9</u>

Soient $l$ un réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes tous strictement positifs. Pour les questions a., b., c. on suppose que $u_n$ converge vers $l$.

a. $l$ est strictement positif.

b. Il existe $n$ entier naturel tel que $l$ soit une valeur approchée de $u_n$ à $10^{-3}$ près.

c. La suite $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln(l)$.

d. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1}=\ln u_n$ et que $u_0>u_1$. On ne suppose pas que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

**<u>Correction</u>**

| Question | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| Réponse | F | V | F | V |

a. Si $l$ pouvait être négative, il existerait des termes de $u_n$ négatifs à partir d'un certain rang ce qui est impossible.

Par contre $l$ peut être nulle : par exemple les suites $q^n$ avec $0 < q < 1$ convergent vers 0.

b. La traduction de cette phrase est : il existe $n$ tel que $|u_n-l|\le 10^{-3}$ ; c'est la définition même d'une suite convergente : il existe $N$ tel que pour tout $n > N$, $|u_n-l|\le kv_n$ où $v_n$ converge vers 0.

c. Supposons que $u_n$ converge vers 0 alors la suite $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ « convergerait » vers $-\infty$. En fait cette suite divergerait.

d. La fonction ln est croissante donc si $u_0>u_1$ alors $\ln u_0>\ln u_1 \Leftrightarrow u_1>u_2$, etc. Par récurrence on a $u_n>u_{n+1}$ donc bien décroissante. Remarquez que si on avait $u_0<u_1$ alors la suite aurait été croissante. En fait dans le cas d'une suite $u_{n+1}=f(u_n)$ avec $f$ croissante tout dépend de l'ordre des deux premiers termes.

<u>1. 4. Fesic 2004 Exercice 10</u>

On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0=1$ et, pour tout entier $n$, $z_{n+1}=\frac{1+i}{2}z_n$. Pour $n$ entier naturel, on appelle $M_n$ le point d'affixe $z_n$.

a. La suite $\left(|z_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. Quel que soit $n$ entier naturel, les triangles $OM_nM_{n+1}$ sont rectangles.

c. $M_n$ appartient à l'axe des abscisses si et seulement si $n$ est un multiple de 4.

d. Pour tout $n$ entier naturel, $z_n = \frac{e^{i\frac{n\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$.

**Correction**

| Question | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| Réponse | F | V | V | V |

a. On a $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\left(|z_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. Il nous faut calculer $(\overrightarrow{M_nO}, \overrightarrow{M_nM}_{n+1}) = \arg(\frac{z_{n+1}-z_n}{0-z_n}) = \arg\frac{\frac{1+i}{2}-1}{-1} = \arg\frac{1-i}{2} = -\frac{\pi}{4}$, ainsi que $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM}_{n+1}) = \arg(\frac{z_{n+1}}{z_n}) = \arg\frac{1+i}{2} = \frac{\pi}{4}$. Le dernier angle vaut donc bien $\frac{\pi}{2}$ (on aurait pu calculer un seul angle mais ç'aurait été moins amusant…).

c. On a évidemment $z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n z_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$ donc $M_n$ appartient à l'axe des abscisses si $n\frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow n = \frac{4k\pi}{\pi} = 4k$.

d. Avec la réponse au c. et en remarquant que $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on retrouve bien $z_n = \frac{e^{i\frac{n\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$.

1. 5. Fesic 2004 Exercice 11

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$. On considère dans ce repère les points A(1 ; −1), B(5 ; 3) et I le milieu de [AB]. Soit $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de points définie par :

* $G_0 = O$,

* Pour $n$ entier naturel, $G_{n+1}$ est le barycentre de {($G_n$ ; 2), (A ; 1), (B ; 1)}.

On appelle ($x_n$ ; $y_n$) les coordonnées de $G_n$.

a. $G_1$, $G_2$ et $G_3$ sont alignés.

b. Quel que soit $n$, $G_{n+1}$ est l'image de G$n$ par l'homothétie de centre I et de rapport 2.

c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = x_n - 3$ est une suite géométrique de premier terme −3 et de raison $\frac{1}{2}$.

d. Pour tout $n$, $x_n = 3\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

**Correction**

| Question | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| Réponse | V | F | V | V |

a. En utilisant le barycentre partiel on a $G_{n+1}$ barycentre de {($G_n$ ; 2), (I ; 2)}, soit le milieu de [$G_n$I], tous les $G_n$ sont donc alignés.

b. L'homothétie est bien de centre I mais de rapport 1/2. Les coordonnées de I sont (3 ; 2).

c. En utilisant la définition d'une homothétie : $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$, on a $\begin{cases} x_{n+1}-3=\frac{1}{2}(x_n-3) \\ y_{n+1}-2=\frac{1}{2}(y_n-2) \end{cases}$ d'où $u_n=x_n-3$ est géométrique de raison 1/2, de premier terme $u_0=x_0-3=-3$.

d. Avec ce qu'on a fait, $(x_n-3)=-3\left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow x_n=3\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$. On peut compléter avec le calcul de $y_n$ : $y_n-2=-2\left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow y_n=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$. Quand $n$ tend vers l'infini $x_n$ et $y_n$ tendent respectivement vers 3 et 2, soit $G_n$ tend vers I (ce qui était prévisible puisqu'à chaque itération on prend le milieu de $[G_nI]$).

1. 6. Fesic 2004 Exercice 12

On considère une droite graduée $\Delta$ d'origine O. On considère les suites de points $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies ainsi :

* $G_0 = O$,
* Pour $n$ entier naturel, $G_{n+1}$ est le barycentre de $\{(G_n ; 2), (H_n ; 3)\}$,
* $H_0$ a pour abscisse 1,
* Pour $n$ entier naturel, $H_{n+1}$ est le barycentre de $\{(G_n ; 3), (H_n ; 2)\}$.

On appelle $g_n$ et $h_n$ les abscisses respectives de $G_n$ et $H_n$.

a. La suite $(g_n-h_n)$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{5}$.

b. La suite $(g_n+h_n)$ est une suite constante.

c. Les deux suites $g_n$ et $h_n$ convergent vers la même limite.

d. Les suites $g_n$ et $h_n$ sont adjacentes.

**Correction**

| Question | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| Réponse | V | V | V | F |

a. Il faut évidemment trouver les relations entre $g_n$ et $h_n$.

$G_{n+1}$ barycentre de $\{(G_n ; 2), (H_n ; 3)\}$ nous donne

$$2(g_{n+1}-g_n)+3(g_{n+1}-h_n)=0 \Leftrightarrow 5g_{n+1}=2g_n+3h_n \Leftrightarrow g_{n+1}=\frac{2}{5}g_n+\frac{3}{5}h_n \;;$$

$H_{n+1}$ barycentre de $\{(G_n ; 3), (H_n ; 2)\}$ nous donne

$$3(h_{n+1}-g_n)+2(h_{n+1}-h_n)=0 \Leftrightarrow 5h_{n+1}=3g_n+2h_n \Leftrightarrow h_{n+1}=\frac{3}{5}g_n+\frac{2}{5}h_n \;;$$

d'où $g_{n+1}-h_{n+1}=\frac{2}{5}g_n+\frac{3}{5}h_n-\frac{3}{5}g_n-\frac{2}{5}h_n=-\frac{1}{5}(g_n-h_n)$.

On peut alors calculer $g_n-h_n=\left(-\frac{1}{5}\right)^n(g_0-h_0)=-\left(-\frac{1}{5}\right)^n$. Quelle est la signification géométrique de ce résultat ?

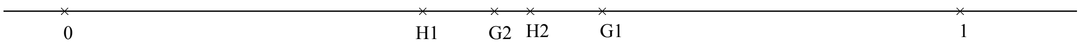
b. $g_{n+1}+h_{n+1}=\frac{5}{5}g_n+\frac{5}{5}h_n=g_n+h_n=\ldots=g_0+h_0=0+1=1$. Quelle est la signification géométrique de ce résultat ?

c. Des deux relations précédentes on tire un petit système : $\begin{cases} g_n - h_n = -(-1/5)^n \\ g_n + h_n = 1 \end{cases}$ d'où

$\begin{cases} g_n = \dfrac{1}{2}\left(1-(-1/5)^n\right) \\ h_n = \dfrac{1}{2}\left(1+(-1/5)^n\right) \end{cases}$ qui convergent toutes les deux vers $\dfrac{1}{2}$, soit le milieu de $[G_0H_0]$.

d. C'est du cours… la condition de monotonie des deux suites n'est pas respectée.

On voit bien qu'à chaque itération la distance $[G_nH_n]$ est divisée par 5.




1. 7. QCM divers

1. Pour tout réel $x$, $e^x$ désigne l'image de $x$ par la fonction exponentielle.

| | |
|---|---|
| Affirmation 1. a. | Pour tous les réels $a$ et $b$ strictement positifs, $\left(e^a\right)^{\ln b} = b^a$. |
| Affirmation 1. b. | Pour tous les réels $a$ et $b$ strictement positifs, $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$. |
| Affirmation 1. c. | La tangente en 1 à la courbe de la fonction exponentielle a pour équation $y = ex$. |

2. Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert $I$ et soit $a$ un élément de $I$.

| | |
|---|---|
| Affirmation 2. a. | Si $f$ est continue sur $I$, alors $f$ admet une seule primitive sur $I$. |
| Affirmation 2. b. | Si $f$ n'est pas continue en $a$, alors $f$ n'est pas dérivable en $a$. |
| Affirmation 2. c. | Si $f$ n'est pas dérivable en $a$, alors la fonction $h \mapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite infinie en $a$. |

3. On considère deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies sur $\mathbb{N}$.

| | |
|---|---|
| Affirmation 3. a. | Si $(u_n)$ est monotone décroissante et minorée et $(v_n)$ est monotone croissante et majorée alors $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers la même limite. |
| Affirmation 3. b. | Si on a $a^n < u_{n+1} - u_n < b^n$ avec $a$ et $b$ dans l'intervalle $]0\,;1[$ alors $u_n$ converge. |
| Affirmation 3. c. | Si $(u_n)$ converge, alors la suite $\left(\ln\lvert u_n\rvert\right)$ converge. |
| Affirmation 3. d. | Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f$ définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$. $f$ est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et pour tout $x > 1$, on a : $f'(x) = 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}$. |

**Correction**

1. Pour tout réel $x$, $e^x$ désigne l'image de $x$ par la fonction exponentielle.

| | |
|---|---|
| Affirmation 1. a. | Vrai : $\left(e^a\right)^{\ln b} = \left(e^{\ln b}\right)^a = b^a$. |

| | |
|---|---|
| Affirmation 1. b. | Faux : $\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b = \ln(ab)$. |
| Affirmation 1. c. | Vrai : en 1, la tangente est $y = e^1(x-1) + e^1 = ex - e + e = ex$. |

2. Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert $I$ et soit $a$ un élément de $I$.

| | |
|---|---|
| Affirmation 2. a. | Faux : Si $f$ est continue sur $I$, alors $f$ admet une infinité de primitives sur $I$, toutes différentes d'une constante. |
| Affirmation 2. b. | Vrai : Si $f$ n'est pas continue en $a$, on n'a pas $f(a)$ et $f$ n'est pas dérivable en $a$. |
| Affirmation 2. c. | Faux : pas forcément, on peut avoir des demi-tangentes. |

3. On considère deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies sur $\mathbb{N}$.

| | |
|---|---|
| Affirmation 3. a. | Faux : il faudrait par exemple en plus que $v_n - u_n$ tende vers 0. |
| Affirmation 3. b. | Vrai : $u_n$ est croissante, et si on fait la somme des inégalités $a^n < u_{n+1} - u_n < b^n$, on a $\sum_k a^k < u_{n+1} - u_0 < \sum_k b^k \Leftrightarrow \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + u_0 < u_{n+1} < \frac{1-b^{n+1}}{1-b} + u_0 < \frac{1}{1-b} + u_0$ ; donc $u_n$ est bornée. |
| Affirmation 3. c. | Faux : Si $(u_n)$ converge vers 0, alors la suite $(\ln\|u_n\|)$ diverge. |
| Affirmation 3. d. | Vrai : $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n \Rightarrow f'(x) = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1}$. |

1. 8. ROC+exemples, France 2005

4 points

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

**PARTIE A : QUESTION DE COURS**

On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$ ;

(2) si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites adjacentes telles que $(u_n)$ est croissante et $(v_n)$ est décroissante, alors pour tout $n$ appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$ ;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

**PARTIE B**

On considère une suite $(u_n)$, définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite $(v_n)$ sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si $(u_n)$ est convergente, alors $(v_n)$ est convergente.

2. Si $(u_n)$ est minorée par 2, alors $(v_n)$ est minorée par $-1$.

3. Si $(u_n)$ est décroissante, alors $(v_n)$ est croissante.

4. Si $(u_n)$ est divergente, alors $(v_n)$ converge vers zéro.

**Correction**

PARTIE A **:** « Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

On a $u_n \le v_n$ et $(v_n)$ décroissante donc $u_n \le v_n \le ... \le v_0$ d'où $(u_n)$ est majorée et converge vers $l$ ; même chose pour $(v_n)$ qui est décroissante et minorée par $u_0$ et converge vers $l'$.

Comme $u_n - v_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$, on a $l - l' = 0 \Rightarrow l = l'$ .

Pour une première ROC la difficulté est raisonnable… Inutile de raconter sa vie non plus !

PARTIE B : $(u_n)$ non nulle, $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

1. Si $(u_n)$ est convergente, alors $(v_n)$ est convergente :

**Faux** : n'importe quelle suite convergente vers 0 ne marche pas, prendre par exemple $1/n$.

2. Si $(u_n)$ est minorée par 2, alors $(v_n)$ est minorée par $-1$ :

**Vrai** : $2 \le u_n \Rightarrow \frac{1}{2} \ge \frac{1}{u_n} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le -\frac{1}{u_n} \Rightarrow -\frac{2}{2} \le -\frac{2}{u_n} \Rightarrow -1 \le v_n$ .

3. Si $(u_n)$ est décroissante, alors $(v_n)$ est croissante :

**Faux** ; $v_{n+1} - v_n = \frac{-2}{u_{n+1}} - \frac{-2}{u_n} = \frac{-2(u_n - u_{n+1})}{u_n u_{n+1}}$ ; si $(u_n)$ est décroissante, $u_{n+1} \le u_n \Rightarrow 0 \le u_n - u_{n+1}$, le numérateur est négatif, si le dénominateur est positif, soit lorsque la suite $(u_n)$ n'a que des termes positifs, $(v_n)$ est décroissante.

4. Si $(u_n)$ est divergente, alors $(v_n)$ converge vers zéro.

**Faux** : une suite peut être divergente sans tendre vers l'infini, par exemple $u_n = (-1)^n$ diverge, de même évidemment que $v_n$ .

Dans l'ensemble les questions ne sont pas trop compliquées, la fabrication de contre-exemples est une bonne activité qui permet la compréhension des phénomènes en jeu. Il est vrai que ne pas connaître les réponses est déstabilisant, mais les correcteurs feront certainement preuve de compréhension.

1. 9. Récurrence 1, France 2004

On considère la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel $n$.

1. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)$.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n > n^2$ .

b. Quelle est la limite de la suite $(u_n)$ ?

3. Conjecturer une expression de $u_n$ en fonction de $n$, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

**Correction**

1. $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$ qui est évidemment positif. $u_n$ est croissante.

2. a. Par récurrence : $u_0 = 1 > 0^2$ , la propriété est vraie au rang 0. Au rang $n + 1$ il faut montrer que $u_{n+1} > (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ ; or si $u_n > n^2$, alors $u_{n+1} > n^2 + 2n + 3$ qui est évidemment supérieur à $n^2 + 2n + 1$. C'est fini.

b. Comme et que $n^2$ tend vers $+\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, $u_n$ tend clairement vers $+\infty$.

3. On calcule les premières valeurs de $u_n$ : $u_0 = 1, u_1 = 1+2.0+3 = 4, u_2 = 4+2.1+3 = 9, u_3 = 9+2.2++3 = 16$. On voit apparaître la suite des carrés des entiers avec un décalage d'un cran par rapport à l'indice ; il s'agit donc de montrer que $u_n = (n+1)^2$ : encore une récurrence.

$u_{n+1} = (n+1)^2 + 2n+3 = n^2 + 2n+1+2n+3 = n^2 + 4n+4 = (n+2)^2$ . C'est bon.

<u>1. 10. Récurrence 2, Pondicherry 2004</u>

1. Soit la suite $u$ définie par $u_0 = 0, u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$.

a. Claculer $u_1, u_2, u_3$. On exprimera chacun des termes sous forme d'une fraction irréductible.

b. Comparer les quatre premiers termes de la suite $u$ aux quatre premiers termes de la suite $w$ définie par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

c. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = w_n$.

2. Soit $v$ la suite définie par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

a. Monter que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

b. Soit $S_n$ la somme définie pour tout entier $n$ non nul par $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$. Exprimer $S_n$ en fonction de $n$. Déterminer la limite de $S_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

**<u>Correction</u>**

1. a. On a $u_0 = 0$, $u_1 = \dfrac{1}{2-0} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{2-1/2} = \dfrac{2}{3}$, $u_3 = \dfrac{1}{2-2/3} = \dfrac{3}{4}$.

b. On voit facilement que les termes de $u_n$ sont ceux de $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

c. Par récurrence (ainsi que demandé) ; on vérifie au rang 0 : $u_0 = 0, w_n = \dfrac{0}{1} = 0$, ok.

Supposons alors que $u_n = w_n$ et montrons que $u_{n+1} = w_{n+1}$ : ceci est équivalent à $\dfrac{1}{2-u_n} = \dfrac{n+1}{n+2}$, soit

$2-u_n = \dfrac{n+2}{n+1} \Leftrightarrow u_n = 2 - \dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{2n+2-n-2}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$. Tout va bien.

2. a. $v_1 = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $v_2 = \ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$, $v_3 = \ln\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

On peut utiliser ln($a/b$) = ln$a$ − ln$b$ : $v_1 + v_2 + v_3 = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 = -\ln 4$ ou bien

ln($ab$) = ln$a$ + ln$b$ : $v_1 + v_2 + v_3 = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \ln\dfrac{3}{4} = \ln\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3}\dfrac{3}{4}\right) = \ln\dfrac{1}{4} = -\ln 4$.

b. $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + ... + \ln\dfrac{n-1}{n} + \ln\dfrac{n}{n+1}$,

soit $S_n = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + ... + \ln(n-1) - \ln n + \ln n - \ln(n+1)$.

Tous les termes intermédiaires disparaissent ; on a donc $S_n = -\ln(n+1)$ qui tend évidemment vers $-\infty$.

<u>1. 11. Récurrence 3, Amérique du Nord 2005</u>

6 points

Le graphique ci-dessous sera complété et remis avec la copie.

Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. Étudier les variations de $f$ sur l'intervalle [0 ; 2]. Montrer que si $x \in [1\,;2]$ alors $f(x) \in [1\,;2]$.

2. $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$,

$v_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

a. Le graphique donné en annexe représente la fonction $f$ sur l'intervalle [0 ; 2]. Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ en laissant apparents tous les traits de construction.

À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ?

b. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

Pour tout entier naturel $n$, $1 \leq v_n \leq 2$.

Pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} \leq v_n$.

On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :

Pour tout entier naturel $n$, $1 \leq u_n \leq 2$.

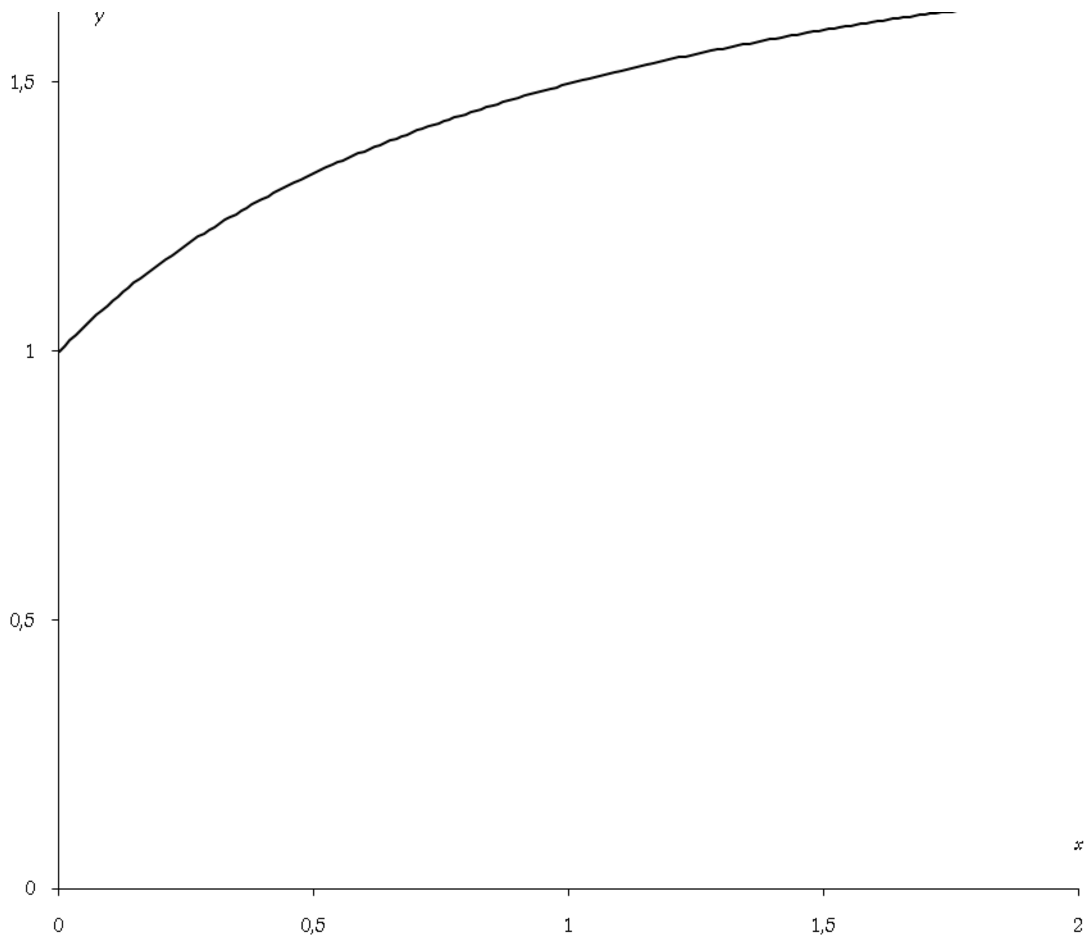
Pour tout entier naturel $n$, $u_n \leq u_{n+1}$.

c. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$.

En déduire que pour tout entier naturel $n$, $v_n - u_n \geq 0$ et $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

d. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

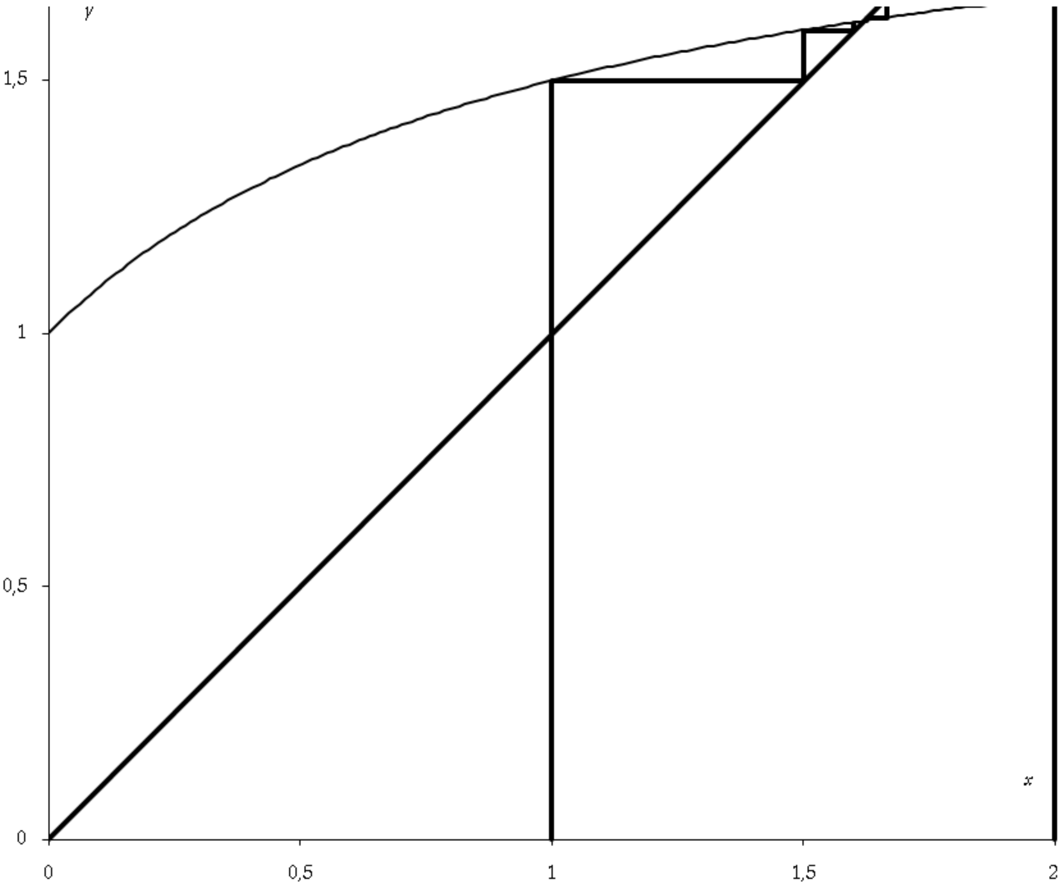
e. Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers un même réel $\alpha$. Déterminer la valeur exacte de $\alpha$.




**Correction**

1. $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$ donc *f* est croissante ; $f(1)=\dfrac{3}{2}>1$ et $f(2)=\dfrac{5}{3}<2$ donc si $x\in[1\,;2]$, $f(x)\in[1\,;2]$.

2. a. Visiblement la suite $u_n$ est croissante, et converge vers le point d'intersection entre la courbe de *f* et la droite ($y = x$), soit environ 1,6 ; de même $v_n$ semble décroissante et converger vers le même point.




b. Pour $n = 0$, on a $v_0 = 2$ qui est bien dans l'intervalle [1 ; 2] ; par ailleurs si $1 \le v_n \le 2$ alors comme $f$ est croissante, $f(1) \le f(v_n) \le f(2) \Rightarrow 1 \le v_{n+1} \le 2$ ; la propriété est toujours vraie.

De même on a $v_1 = f(2) = \frac{5}{3} \le v_0$ ; par ailleurs si $v_{n+1} \le v_n \Rightarrow f(v_{n+1}) \le f(v_n) \Rightarrow v_{n+2} \le v_{n+1}$, etc.

Remarquez que c'est $v_1 = f(2) = \frac{5}{3} \le v_0$ qui entraîne tous les autres termes derrière avec la complicité de la croissance de $f$. Pour $u_n$ c'est pratiquement pareil, sauf que $u_1 = f(u_0) = \frac{3}{2} > u_0$ et donc, etc.

c. On n'échappe pas au calcul :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{2u_n v_n + 2v_n + u_n + 1 - 2u_n v_n - v_n - 2u_n - 1}{(v_n + 1)(u_n + 1)} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}.$$

$v_{n+1} - u_{n+1}$ est du signe de $v_n - u_n$ ; comme $v_0 - u_0 = 2 - 1 > 0$, par récurrence on a $v_n - u_n \ge 0$ ; on a $v_n > 1 \Rightarrow v_n + 1 > 2 \Rightarrow \frac{1}{v_n + 1} < \frac{1}{2}$ et pareil pour $u_n$ donc $v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{2} . \frac{1}{2}(v_n - u_n) = \frac{1}{4}(v_n - u_n)$.

d. Encore une récurrence : $v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1 \le \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$ ; grâce à la relation précédente on a évidemment $v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{4}(v_n - u_n) \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

e. Les suites $u_n$ et $v_n$ sont adjacentes car $0 \le v_n - u_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow 0 \le \lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) \le 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$ ; elles convergent bien vers une même limite $\alpha$ telle que

$$\alpha = f(\alpha) = \frac{2\alpha+1}{\alpha+1} \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha = 2a+1 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \\ \alpha_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618 \end{cases}.$$

La limite est donc la première racine, soit $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. 12. Suite homographique, N. Calédonie 06/2008

*5 points*

On considère la fonction $f$ définie sur $]-1\,;\,6[$ par $f(x) = \frac{9}{6-x}$. On définit pour tout entier $n$ la suite $(U_n)$ par $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.

1. La courbe représentative de la fonction $f$ est donnée ci-dessous accompagnée de celle de la droite d'équation $y = x$. Construire, sur ce graphique les points $M_0(U_0\,;\,0)$, $M_1(U_1\,;\,0)$, $M_2(U_2\,;\,0)$, $M_3(U_3\,;\,0)$ et $M_4(U_4\,;\,0)$.
Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite $(U_n)$ ?

2. a. Démontrer que si $x < 3$ on a alors $\frac{9}{6-x} < 3$. En déduire que $U_n < 3$ pour tout entier naturel $n$.

b. Étudier le sens de variation de la suite $(U_n)$.

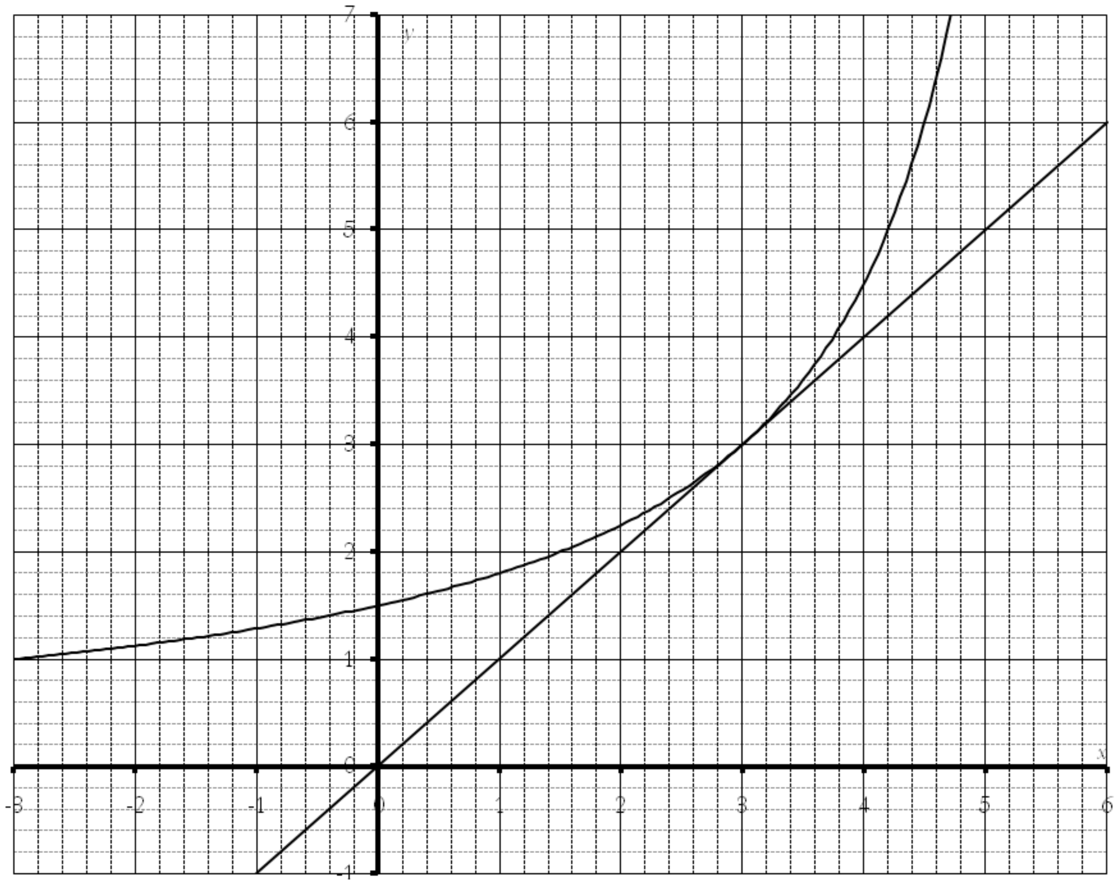
c. Que peut-on déduire des questions 2. a. et 2. b. ?

3. On considère la suite $(V_n)$ définie par $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$ pour tout entier naturel $n$.

a. Démontrer que la suite $(V_n)$ est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

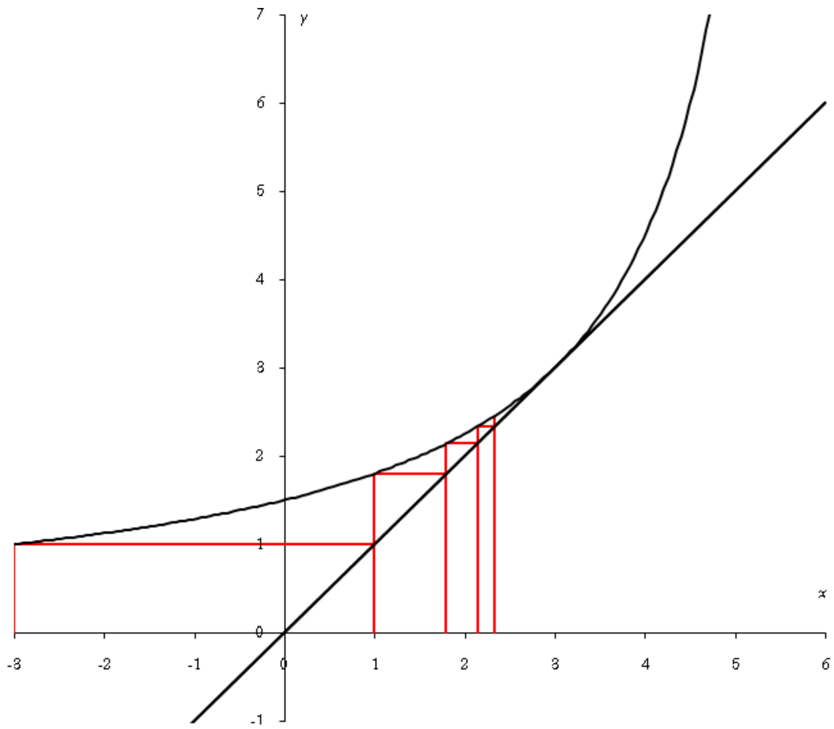
b. Déterminer $V_n$ puis $U_n$ en fonction de $n$.

c. Calculer la limite de la suite $(U_n)$.




**Correction**

1. Voir la figure ci-dessous.



La suite semble croissante et converger vers le point (3 ; 3), soit vers une limite égale à 3.

2. a. Si $x < 3$, $-x > -3 \Rightarrow 6-x > 3 \Rightarrow \frac{1}{6-x} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{9}{6-x} < 3$ (on aurait pu utiliser les variations de $f$).

Par récurrence on a alors : $U_0 < 3$ par définition ; si $U_n < 3$ alors $f(U_n) = \frac{9}{6-U_n} < 3$ et donc $U_{n+1} < 3$ .

b. $U_{n+1} - U_n = \frac{9}{6-U_n} - U_n = \frac{U_n^2 - 6U_n + 9}{6-U_n} = \frac{(U_n-3)^2}{6-U_n}$ qui est positif puisuqe $U_n < 6$ .

La suite est croissante.

c. $U_n$ est croissante et majorée, elle converge donc.

3. a. $V_n = \frac{1}{U_n - 3} \Leftrightarrow U_n - 3 = \frac{1}{V_n} \Leftrightarrow U_n = 3 + \frac{1}{V_n}$ ; on a donc en remplaçant :

$$U_{n+1} = \frac{9}{6-U_n} \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{V_{n+1}} = \frac{9}{6-3-\frac{1}{V_n}} \Leftrightarrow \frac{1}{V_{n+1}} = \frac{9}{3-\frac{1}{V_n}} - 3 = \frac{9V_n}{3V_n-1} - 3 = \frac{9V_n - 9V_n + 3}{3V_n - 1} = \frac{3}{3V_n-1},$$

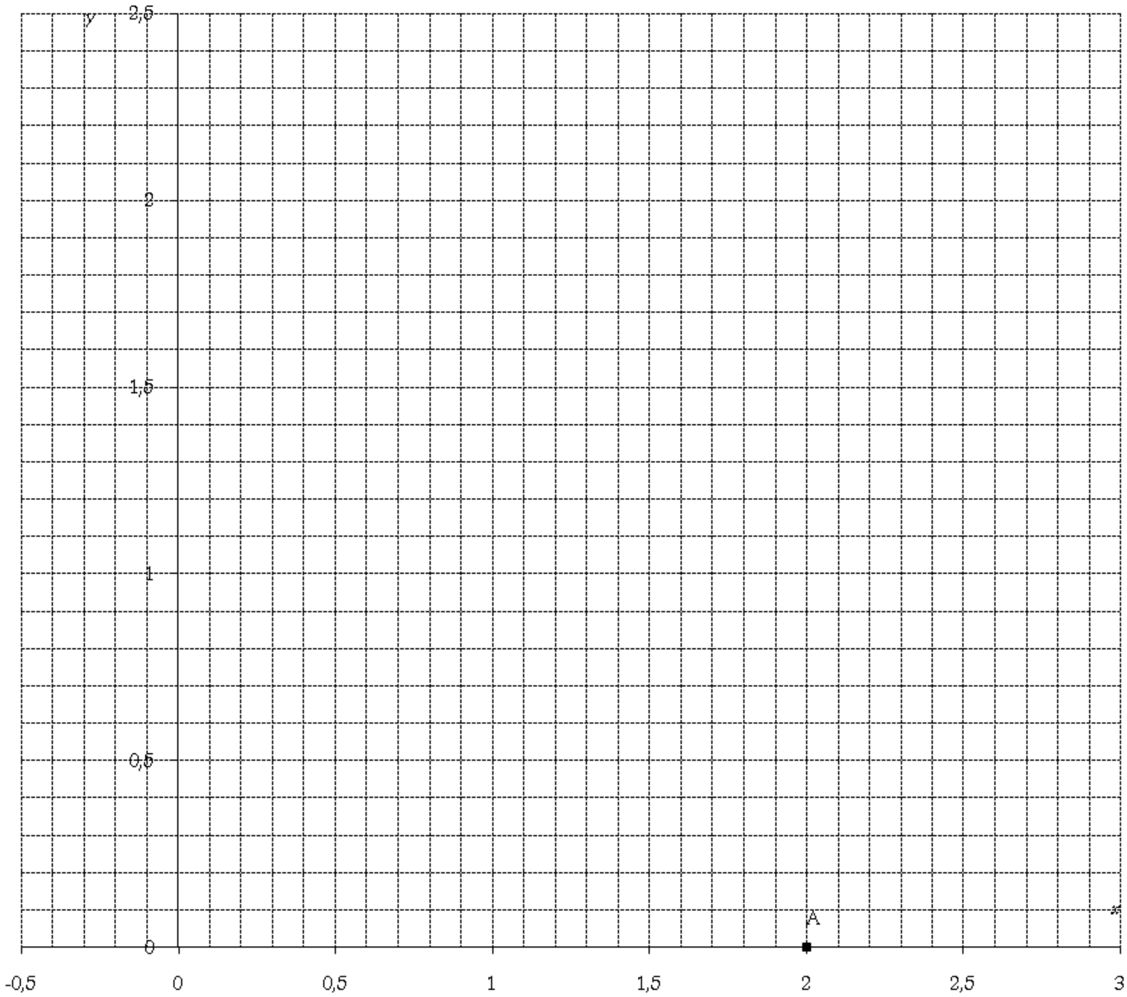
soit $V_{n+1} = \frac{3V_n - 1}{3} = V_n - \frac{1}{3}$ ; ($V_n$) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

b. $V_0 = \frac{1}{U_0 - 3} = -\frac{1}{6}$ d'où $V_n = V_0 + nr = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n = -\frac{1+2n}{6}$ et $U_n = 3 + \frac{1}{V_n} = 3 - \frac{6}{2n+1}$ .

c. La limite de la suite ($U_n$) est alors bien évidemment 3…

1. 13. Suite récurrente, France remplt 2007

*6 points*




1. La suite $u$ est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$ pour tout entier naturel $n$.

a. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan ci-dessous, la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$ et le point $A$ de coordonnées (2 ; 0).

Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite $u$.

b. Démontrer que si la suite $u$ est convergente alors sa limite est $l = \frac{23}{18}$.

c. Démontrer que pour tout entier naturel $n$ on a : $u_n > \frac{23}{18}$.

d. Étudier la monotonie de la suite $u$ et donner sa limite.

2. a. Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que : $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$ c'est-à-dire que $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$.

b. La suite $v$ est définie par $v_n = 1{,}277\,7\ldots7$ avec $n$ décimales consécutives égales à 7.

Ainsi $v_0 = 1{,}2$, $v_1 = 1{,}27$ et $v_2 = 1{,}277$.

En utilisant le 2. a. démontrer que la limite de la suite $v$ est un nombre rationnel $r$ (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

3. La suite $u$ définie au 1. et la suite $v$ sont-elles adjacentes ? Justifier.

**Correction**

1. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$.

a. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite $u$.

b. Si la suite $u$ est convergente alors sa limite $l$ est telle que $l = \frac{1}{3}l + \frac{23}{27} \Leftrightarrow \frac{2}{3}l = \frac{23}{27} \Leftrightarrow l = \frac{23}{18}$.

c. Par récurrence : $u_0 = 2 > \frac{23}{18}$.

On suppose $u_n > \frac{23}{18}$, alors $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} > \frac{1}{3}\times\frac{23}{18} + \frac{23}{27} = \frac{23+46}{54} = \frac{69}{54} = \frac{23}{18}$ CQFD.

d. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{23}{27}$ qui est positif lorsque $-\frac{2}{3}u_n > -\frac{23}{27} \Leftrightarrow u_n < \frac{23}{18}$, ce qui est faux donc $u_n$ est décroissante. La suite est décroissante, minorée elle converge donc vers $l = \frac{23}{18}$.

2. a. Somme des $n$ premiers termes (de 2 à $n+1$ il y a $n$ termes) d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$ et de raison $\frac{1}{10}$ : $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{100}\left(\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}\right) = \frac{1}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$.

b. $v_0 = 1,2$, $v_1 = v_0 + 0,07 = v_0 + 7\frac{1}{10^2}$, $v_2 = v_1 + 0,007 = v_0 + 7\frac{1}{10^2} + 7\frac{1}{10^3}$, etc.

On a donc $v_n = 1,2 + 7\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^{n+1}}\right) = 1,2 + 7\left[\frac{1}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right]$. Lorsque $n$ tend vers $+\infty$, $\frac{1}{10^n}$ tend vers 0 et $v_n$ tend vers $1,2 + \frac{7}{90} = \frac{12}{10} + \frac{7}{90} = \frac{115}{90} = \frac{23}{18}$.

3. $u$ décroissante et minorée, $v$ croissante et majorée (évident) ; elles ont même limite, elles sont adjacentes.

1. 14. Barycentre 1, N. Caledonie 2005

*5 points*

PARTIE A

Étant donnés deux points distincts $A_0$ et $B_0$ d'une droite, on définit les points : $A_1$ milieu du segment $[A_0B_0]$ et $B_1$ barycentre de $\{(A_0, 1) ; (B_0, 2)\}$.

Puis, pour tout entier naturel $n$, $A_{n+1}$ milieu du segment $[A_nB_n]$ et $B_{n+1}$ barycentre de $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

1. Placer les points $A_1$ , $B_1$, $A_2$ et $B_2$ pour $A_0B_0 = 12$ cm.

Quelle conjecture peut-on faire sur les points $A_n$ et $B_n$ quand $n$ devient très grand ?

2. On munit la droite $(A_0B_0)$ du repère $\left(A_0 ; \vec{i}\right)$ avec $\vec{i} = \frac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$.

Soit $u_n$ et $v_n$ les abscisses respectives des points $A_n$ et $B_n$. Justifier que pour tout entier naturel $n$ strictement positif, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

PARTIE B

On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par $u_0 = 0$ ; $v_0 = 12$ ; $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

1. Démontrer que la suite $(w_n)$ définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.

2. Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante puis que la suite $(v_n)$ est décroissante.

3. Déduire des deux questions précédentes que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes et ont la même limite.

4. On considère la suite $(t_n)$ définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$. Montrer qu'elle est constante.

PARTIE C

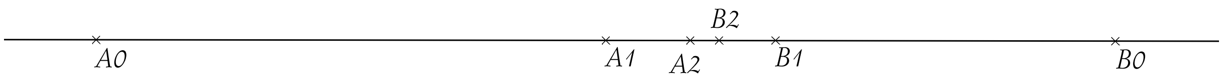
À partir des résultats obtenus dans les parties A et B, préciser la position limite des points $A_n$ et $B_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$ .

**Correction**

PARTIE A

$A_{n+1}$ milieu du segment $[A_nB_n]$ et $B_{n+1}$ barycentre de $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

1.




Même quand $n$ n'est pas très grand, les suites de points convergent vers un point qui semble être à peu près au milieu de $[A_2B_2]$.

2. On a dans ce repère les abscisses suivantes : $u_0 = 0$ et $v_0 = 12$ .

Si $u_n$ et $v_n$ sont les abscisses des points $A_n$ et $B_n$, on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ car $A_{n+1}$ est le milieu de $[A_nB_n]$ et $v_{n+1} = \dfrac{1.u_n + 2.v_n}{1+2} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ car $B_{n+1}$ est le barycentre de $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

PARTIE B

1. $w_n = v_n - u_n \Rightarrow w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - \dfrac{u_n + v_n}{2} = \dfrac{2u_n + 4v_n - 3u_n - 3v_n}{6} = \dfrac{v_n - u_n}{6}$ donc $w_n$ est une suite géométrique de raison 1/6, donc convergente vers 0. Tous ses termes sont positifs car $w_n = w_0 \dfrac{1}{6^n} = \dfrac{12}{6^n}$ .

2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \dfrac{v_n - u_n}{2} = \dfrac{1}{2} w_n > 0$ donc $(u_n)$ est croissante ;

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 2v_n - 3v_n}{3} = -\dfrac{1}{3} w_n < 0$ donc la suite $(v_n)$ est décroissante.

3. Comme $w_n > 0$ , on a $u_n < v_n$ donc $u_n$ est croissante majoée, $v_n$ décroissante minorée, les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes et sont adjacentes car $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$ ; elles ont donc la même limite.

4. $t_{n+1} = 2u_{n+1} + 3v_{n+1} = 2\dfrac{u_n + v_n}{2} + 3\dfrac{u_n + 2v_n}{3} = u_n + v_n + u_n + 2v_n = 2u_n + 3v_n = t_n = ... = t_0 = 2u_0 + 3v_0 = 36$ .

PARTIE C

Comme $u_n$ et $v_n$ tendent vers la même limite $l$, en remplaçant dans $t_n$ on a :

$$t_n = 2u_n + 3v_n = 36 \to 2l + 3l = 5l = 36 \Rightarrow l = \frac{36}{5}.$$

1. 15. Barycentre 2, N. Calédonie 2004

On considère les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies, pour tout entier naturel $n$, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}.$$

1. Calculer $u_1, v_1, u_2, v_2$.

2. Soit la suite $(w_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $w_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que la suite $(w_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b. Exprimer $w_n$ en fonction de $n$ et préciser la limite de la suite $(w_n)$.

3. Après avoir étudié le sens de variation des suites $(u_n)$ et $(v_n)$, démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

4. On considère à présent la suite $(t_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

a. Démontrer que la suite $(t_n)$ est constante.

b. En déduire la limite des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

**Correction**

1. $u_1 = \dfrac{u_0 + v_0}{2} = \dfrac{7}{2}$, $v_1 = \dfrac{u_1 + v_0}{2} = \dfrac{15}{4}$, $u_2 = \dfrac{u_1 + v_1}{2} = \dfrac{29}{8}$, $v_2 = \dfrac{u_2 + v_1}{2} = \dfrac{59}{16}$.

2. a. $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} - \dfrac{u_n + v_n}{2} = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{2} = \dfrac{\frac{u_n + v_n}{2} - u_n}{2} = \dfrac{u_n + v_n - 2u_n}{4} = \dfrac{v_n - u_n}{4} = \dfrac{1}{4} w_n$.

b. $w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 3 = 1$ donc $w_n = 1.\dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1}{4^n}$ ; sa limite est évidemment 0.

3. On a vu que $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{2} = w_{n+1} > 0$ donc $u_n$ est croissante ; par ailleurs $w_n = v_n - u_n > 0$ donc $u_n > v_n$ ; enfin $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2} u_{n+1} + \dfrac{1}{2} v_n - v_n = \dfrac{1}{2}(u_{n+1} - v_n) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n) = \dfrac{1}{4}(u_n - v_n) < 0$ donc $v_n$ est décroissante.

Il reste à montrer que $\lim\limits_{n \to \infty}(u_n - v_n) = 0$ or c'est justement la limite de $w_n$. Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent donc vers la même limite (inconnue pour l'instant…).

4. a. $t_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{u_n + v_n}{2} + 2\dfrac{u_{n+1} + v_n}{2}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{u_n + v_n}{2} + \dfrac{u_n + v_n}{2} + v_n\right) = \dfrac{1}{3}\left(u_n + 2v_n\right) = t_n$. On a donc $t_n = \dfrac{1}{3}(u_0 + v_0) = \dfrac{7}{3}$.

b. Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ont même limite $l$ donc à l'infini, en remplaçant dans $t_n$ : $\dfrac{7}{3} = \dfrac{1}{3}(l + 2l) \Rightarrow l = \dfrac{7}{3}$.

1. 16. Une exponentielle, Pondicherry 2005

6 points

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel $n$ non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leq 0,95 u_n \text{ si et seulement si } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

2. On considère la fonction *f* définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$.

a. Etudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction *f*.

b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$ un unique nombre réel $\alpha$ tel que $f(\alpha)=1,9$.

c. Déterminer l'entier naturel $n_0$ tel que $n_0-1\le\alpha\le n_0$.

d. Montrer que, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 16, on a : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}\le 1,9$.

3. a. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$ à partir du rang 16.

b. Que peut-on en déduire pour la suite ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 16, l'encadrement : $0\le u_n\le 0,95^{n-16}u_{16}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Correction**

1. On remplace, on simplifie et on a ce qui est demandé :

$$u_{n+1}\le 0,95u_n \Leftrightarrow \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}\le 0,95\frac{n^{10}}{2^n}\Leftrightarrow \frac{(n+1)^{10}}{n^{10}}\le 0,95\frac{2^n.2}{2^n}\Leftrightarrow\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10}\le 1,9\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}\le 1,9.$$

2. a. $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}$ ; $f'(x)=10\left(1+\frac{1}{x}\right)'\left(1+\frac{1}{x}\right)^9=10\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^9<0$ donc *f* est décroissante ;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}=1^{10}=1$.

b. $f(1)=2^{10}$ et $f$ décroissante donc $f$ est bijective de $[1\,;+\infty[$ vers $]1\,;2^{10}]$ ; comme 1,9 est dans cet intervalle, il existe bien un unique réel $\alpha$ tel que $f(\alpha)=1,9$.

c. On a $f(15)\approx 1,9067$ et $f(16)\approx 1,8335$ d'où $16-1=15\le\alpha\le 16$.

d. Lorsque $x\ge\alpha$, comme $f$ est décroissante, on a : $f(x)\le f(\alpha)=1,9$, donc pour tous les $n$ tels que $n\ge 16\ge\alpha$, on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}=f(n)\le f(16)\le f(\alpha)=1,9$.

3. a. D'aprèe ce que nous venons de dire, la suite $(u_n)$ est telle que $u_{n+1}\le 0,95u_n$ à partir du rang 16 ; comme tous les termes sont évidemment positifs, la suite $(u_n)$ est décroissante à prtir de ce rang.

b. Décroissante et minorée par 0 donc convergente.

4. $0\le u_n\le 0,95^{n-16}u_{16}$ : on vérifie facilement au rang 16 car $0\le u_{16}\le u_{16}$ ; quand on passe au rang suivant, on a $u_{n+1}\le 0,95u_n\le 0,95.0,95^{n-16}u_{16}=0,95^{(n+1)-16}u_{16}$, CQFD.

Comme $0,95<1$, $0,95^{n-16}$ tend vers 0 à l'infini ainsi que $u_n$ grâce à nos amis les gendarmes.

1. 17. Formule de Stirling

Soit la suite $(u_n)$ ($n>0$) définie par : $u_n=\frac{n^n e^{-n}}{n!}$.

1. Donner des valeurs approchées de $u_1, u_2, u_3$ à $10^{-2}$ près.

2. a. Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $g(t)=\ln(1+t)-t+\frac{t^2}{4}$. En utilisant les variations de *g*, démontrer que pour tout *t* de $[0\,;\,1]$ on a : $\ln(1+t)\le t-\frac{t^2}{4}$.

b. En déduire que pour tout $n > 0$, on a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e^{1-\frac{1}{4n}}$ (on pourra poser $t = 1/n$).

3. a. Démontrer que pour tout entier $n > 0$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le e^{-\frac{1}{4n}}$.

b. En déduire que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2 on a : $u_n \le e^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\ldots+\frac{1}{2}+1\right)}$.

4. a. Par des considérations d'aire montrer que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2 on a :

$$\int_1^n \frac{1}{t}\,dt \le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}.$$

b. En déduire que que pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2 on a : $u_n \le e^{-1-\frac{1}{4}\ln n}$. Quelle est la limite de la suite $(u_n)$ ?

*Commentaire : on explore ici un moyen d'approcher n! : comme $u_n$ tend vers 0, on peut se dire qu'en multipliant par quelque chose de la forme $Kn^\alpha$ la limite peut devenir 1. Ceci donnerait alors un équivalent de n! de la forme $Kn^\alpha\left(\frac{n}{e}\right)^n$. En l'occurrence ça marche, il s'agit de $\left(\sqrt{2\pi}\right)n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi n}$ : $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.*

**Correction**

1. $u_1 \approx 0{,}3679, u_2 \approx 0{,}2707, u_3 \approx 0{,}2240$.

2. a. $g(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}$ ; $g'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 + \frac{t}{2} = \frac{2-2-2t+t+t^2}{2(1+t)} = \frac{t^2-t}{2(1+t)} = \frac{t(t-1)}{2(1+t)} < 0$ sur [0 ; 1].

$g$ est décroissante et $g(0) = \ln 1 - 0 + 0 = 0$ par conséquent $g(t) \le g(0) = 0 \Rightarrow \ln(1+t) \le t - \frac{t^2}{4}$.

b. Posons $t = \frac{1}{n}$ dans la relation précédente : $\ln(1+t) \le t - \frac{t^2}{4} \Leftrightarrow \ln(1+\frac{1}{n}) \le \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} \Leftrightarrow n\ln(1+\frac{1}{n}) \le 1 - \frac{1}{4n}$ d'où

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \ln\left(e^{1-\frac{1}{4n}}\right) \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e^{1-\frac{1}{4n}}$.

3. a. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}e^{-n-1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n e^{-n}} = \frac{\cancel{(n+1)}(n+1)^n \cancel{e^{-n}} e^{-1}}{n^n \cancel{e^{-n}}}\frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\cancel{(n+1)}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n e^{-1} \le e^{1-\frac{1}{4n}}e^{-1} = e^{-\frac{1}{4n}}$.

b. On a $u_{n+1} \le e^{-\frac{1}{4n}}u_n \Rightarrow u_n \le e^{-\frac{1}{4(n-1)}}u_{n-1} \Rightarrow u_{n-1} \le e^{-\frac{1}{4(n-2)}}u_{n-2}\ldots \Rightarrow u_2 \le e^{-\frac{1}{4.1}}u_1 = e^{-\frac{1}{4.1}}e^{-1}$.

Par conséquent on a en effectuant les produits d'inégalités successifs :

$u_n \le e^{-\frac{1}{4(n-1)}}u_{n-1} \le e^{-\frac{1}{4(n-1)}}e^{-\frac{1}{4(n-2)}}u_{n-2} \le \ldots \le e^{-\frac{1}{4(n-1)}}e^{-\frac{1}{4(n-2)}}\ldots e^{-\frac{1}{4.1}}u_1 = e^{-\frac{1}{4(n-1)}}e^{-\frac{1}{4(n-2)}}\ldots e^{-\frac{1}{4.1}}e^{-1}$,

soit $u_n \le e^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\ldots+\frac{1}{2}+1\right)}$.

4. a. Cet argument est très classique. Entre deux valeurs entières consécutives, $k$ et $k+1$, l'aire sous la courbe de $1/x$ est inférieure à l'aire du rectangle de largeur 1 et de hauteur $1/(k+1)$ :

$$k \le t \le k+1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} \le \frac{1}{t} \le \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,dt \le \frac{1}{k}$$

d'où en sommant sur tous ces rectangles :

$$\int_1^n \frac{1}{t}\,dt=\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt+\ldots+\int_{n-1}^n \frac{1}{t}\,dt\le \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}.$$

b. On a donc $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\ge \ln n \Rightarrow -\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)\le -\ln n$, soit

$$-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)\le -1-\frac{1}{4}\ln n$$

et d'après l'inégalité du 3.b : $u_n \le e^{-1-\frac{1}{4}\ln n}$.

La suite $(u_n)$ est positive et la partie droite tend vers $\exp(-\infty)$, soit 0. Donc la suite tend vers 0.

<u>1. 18. Suites adjacentes, Antilles 2004</u>

On définit les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ par $a_0=1$, $b_0=7$ et $\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{3}(2a_n+b_n) \\ b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+2b_n)\end{cases}$.

Soit D une droite munie d'un repère $\left(O\,;\vec{i}\right)$. Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on considère les points $A_n$ et $B_n$ d'abscisses respectives $a_n$ et $b_n$.

1. Placez les points $A_0$, $B_0$, $A_1$, $B_1$, $A_2$ et $B_2$.
2. Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_n = b_n - a_n$. Démontrez que $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. Exprimez $u_n$ en fonction de $n$.
3. Comparez $a_n$ et $b_n$. Étudiez le sens de variation des suites $(a_n)$ et $(b_n)$. Interprétez géométriquement ces résultats.
4. Démontrez que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes.
5. Soit $(v_n)$ la suite définie par $v_n = b_n - a_n$ pour tout entier $n$. Démontrez que $(v_n)$ est une suite constante. En déduire que les segments $[A_nB_n]$ ont tous le même milieu I.
6. Justifiez que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont convergentes et calculez leur limite. Interprétez géométriquement ce résultat.

<u>**Corrigé**</u>

1. Les points ont pour abscisse :

$a_1=\frac{1}{3}(2+7)=3$ ; $b_1=\frac{1}{3}(1+14)=5$ ; $a_2=\frac{1}{3}(6+5)=\frac{11}{3}$ ; $b_2=\frac{1}{3}(3+10)=\frac{13}{3}$.

2. $(u_n)$ est géométrique : on a $u_n=b_n-a_n$ d'où

$$u_{n+1}=b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+2b_n)-\frac{1}{3}(2a_n+b_n)=\frac{1}{3}(b_n-a_n)=\frac{1}{3}u_n.$$

La suite $(u_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 7-1 = 6$. Finalement on a $u_n=6\times\frac{1}{3^n}$.

3. Comparons $a_n$ et $b_n$ et cherchons les variations de ces suites :

$b_n - a_n =\ u_n=\frac{6}{3^n}>0$ donc $b_n > a_n$.

$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{3}(a_n+2b_n)-b_n=-\frac{1}{3}(b_n-a_n)=-\frac{1}{3}u_n<0$ donc $(b_n)$ est décroissante.

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3}(2a_n+b_n)-a_n=\frac{1}{3}(b_n-a_n=\frac{1}{3}u_n>0$ donc $(a_n)$ est croissante.

Graphiquement cela se traduit par le fait que la suite des points $A_n$ avance vers la droite alors que la suite des points $B_n$ se déplace vers la gauche mais les points $A_n$ demeurent en permanence à gauche des points $B_n$.

4. Montrons que $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes : $(b_n)$ est décroissante, $(a_n)$ est croissante, $\lim(b_n - a_n) = \lim(6\frac{1}{3^n}) = 0$ car la limite d'une suite géométrique de raison $r$ telle que $|r| < 1$ est 0, donc les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes.

5. $v_n = a_n + b_n$ donc $v_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) + \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) = a_n + b_n = v_n$ donc $(v_n)$ est constante : le milieu du segment $[A_nB_n]$ est $I_n$ d'abscisse $i_n = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{v_n}{2} = \frac{v_0}{2}$ car $(v_n)$ est constante donc le milieu de $[A_nB_n]$ est constant et est la point I d'abscisse 4 car $v_0 = 1 + 7 = 8$.

6. Les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont respectivement croissante et décroissante et $b_n > a_n$ donc

$1 = a_0 \le a_n \le b_n \le b_0 = 7$ ;

$(a_n)$ est croissante et majorée par 7 donc $(a_n)$ converge.

$(b_n)$ est décroissante et minorée par 1 donc $(b_n)$ converge.

De plus ces deux suites sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite $L$.

En utilisant la suite constante $(v_n)$ telle que $v_n = a_n + b_n = 8$ et par passage à la limite : $\lim a_n + \lim b_n = 8$ donc $L + L = 8$ donc $L = 4$.

Géométriquement, cela se traduit par le fait que les suites de points $(A_n)$ et $(B_n)$ vont se rapprocher du point $I(4)$, l'une par la gauche, l'autre par la droite.

1. 19. Suites adjacentes : calcul de la racine carrée

On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et les relations :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{7}{u_n}$$

1. Calculer $v_0$, $u_1$, $v_1$, $u_2$, $v_2$, $u_3$ et $v_3$. Donner l'approximation de $u_3$ et $v_3$ lue sur la calculatrice.

2. Justifier par récurrence que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

3. a. Démontrer que quel que soit $n$ de $\mathbb{N}$, $(u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2$.

b. En déduire que $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$.

c. Conclure que quel que soit $n$ on a $u_n - v_n \ge 0$.

4. En s'aidant de la question 3. c., prouver que la suite $(u_n)$ est décroissante et que la suite $(v_n)$ est croissante.

5. a. Démontrer que quel que soit $n$ de $\mathbb{N}^*$, $u_n \ge \frac{21}{8}$.

b. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que $u_{n+1} - v_{n+1} \le \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2$.

c. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $u_n - v_n \le \frac{1}{10^{2^n - 1}}$.

d. Déterminer la limite de $u_n - v_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

6. Conclure que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

7. Justifier que $u_3$ est une approximation de $\sqrt{7}$ à $10^{-7}$ près.

8. Proposez une méthode générale pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{a}$ où a est un réel quelconque positif.

*Cette méthode est celle utilisée par le mathématicien grec Héron (1er siècle) pour déterminer une approximation des racines carrées.*

**Correction**

1. $v_0=\frac{7}{u_0}=\frac{7}{3}$ ; $u_1=\frac{u_0+v_0}{2}=\frac{3+\frac{7}{3}}{2}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$ ; $v_1=\frac{7}{u_1}=\frac{7}{\frac{8}{3}}=\frac{21}{8}$ ; $u_2=\frac{u_1+v_1}{2}=\frac{\frac{8}{3}+\frac{21}{8}}{2}=\frac{64+63}{48}=\frac{127}{48}$ ;

$v_2=\frac{7}{u_2}=\frac{7}{\frac{127}{48}}=\frac{336}{127}$ ; $u_3=\frac{u_2+v_2}{2}=\frac{\frac{127}{48}+\frac{336}{127}}{2}=\frac{32257}{12192}\approx 2,64575$ ; $v_3=\frac{7}{u_3}=\frac{7}{\frac{32257}{12192}}=\frac{85344}{32257}\approx 2,64575$ .

Il semble que les suites tendent vers $2,64575\ldots$ et que la convergence soit très rapide.

2. $P_n$ : $u_n>0$ et $v_n>0$.

$P_0$ : $u_0=3>0$ et $v_0=7/3>0$ : $P_0$ est vérifiée.

Supposons $P_n$ vraie : $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}>0$ puisque $u_n$ et $v_n$ sont positifs, et bien sûr il en résulte que $v_{n+1}=\frac{7}{u_{n+1}}>0$. On a bien, quel que soit $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n>0$ et $v_n>0$.

3. a. $(u_n+v_n)^2-28=(u_n-v_n)^2 \Leftrightarrow (u_n+v_n)^2-(u_n-v_n)^2=28 \Leftrightarrow 2(2u_nv_n)=28 \Leftrightarrow u_nv_n=7 \Leftrightarrow v_n=\frac{7}{u_n}$.

3. b. $\frac{1}{4u_{n+1}}(u_n-v_n)^2=\frac{1}{4u_{n+1}}\left((u_n+v_n)^2-28\right)=\frac{1}{u_{n+1}}\left(\frac{(u_n+v_n)^2}{4}-7\right)$

$$=\frac{1}{u_{n+1}}\left(u_{n+1}{}^2-7\right)=u_{n+1}-\frac{7}{u_{n+1}}=u_{n+1}-v_{n+1}.$$

3. c. De l'égalité précédente, on conclut que $u_{n+1}-v_{n+1}$ est strictement positif quel que soit $n$, c'est-à-dire en remplaçant $n+1$ par $n$, on a $u_n-v_n$ positif pour $n\geq 1$. Il faut vérifier que l'inégalité est aussi vraie pour $n=0$ : $u_0-v_0=3-\frac{7}{3}=\frac{2}{3}>0$. On a bien $u_n-v_n>0$ ou encore $u_n>v_n$.

4. $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{u_n+v_n-2u_n}{2}=\frac{v_n-u_n}{2}<0$ car $v_n-u_n<0$ ; $v_{n+1}-v_n=\frac{7}{u_{n+1}}-\frac{7}{u_n}=\frac{7(u_n-u_{n+1})}{u_{n+1}u_n}>0$ car $u_{n+1}-u_n<0$ et $u_n>0$ quel que soit $n$. La suite $(u_n)$ est bien décroissante et la suite $(v_n)$ est croissante.

5. a. On sait que $u_n>v_n$ or la suite $v_n$ est croissante, donc $v_n>v_1$, on a donc : $u_n>v_n>v_1=\frac{21}{8}$.

5. b. Par équivalence :

$u_{n+1}-v_{n+1}\leq\frac{1}{10}(u_n-v_n)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n-v_n)^2\leq\frac{1}{10}(u_n-v_n)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4u_{n+1}}\leq\frac{1}{10} \Leftrightarrow 4u_{n+1}\geq 10 \Leftrightarrow u_{n+1}\geq\frac{5}{2}$. Or on sait que $u_n>\frac{21}{8}>\frac{5}{2}$ d'où le résultat.

5.c. On veut montrer par récurrence la propriété $P_n$ : $u_n-v_n\leq\frac{1}{10^{2^n-1}}$.

Vérifions $P_0$ : $u_0-v_0=\frac{2}{3}<\frac{1}{10^{2^0-1}}=1$, ok.

Démontrons $P_{n+1}$ :

$$u_{n+1}-v_{n+1}\leq\frac{1}{10}(u_n-v_n)^2\leq\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10^{2^n-1}}\right)^2=\frac{1}{10}\times\frac{1}{\left(10^{2^n-1}\right)^2}=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10^{(2^n-1)\times 2}}=\frac{1}{10\times 10^{2^n\times 2}\times 10^{-2}}=\frac{1}{10^{2^{n+1}-1}}.$$

5. d. On a $0 \le u_n - v_n \le \dfrac{1}{10^{2^n-1}}$ et on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{10^{2^n-1}} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$ (gendarmes).

6. Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes, elles sont donc convergentes vers la même limite $\lambda$. Celle-ci vérifie la relation $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{7}{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n} \Leftrightarrow l = \dfrac{7}{l} \Leftrightarrow l^2 = 7$ ; or $l > 0$ donc $l = \sqrt{7}$.

7. $u_3 - v_3 \le \dfrac{1}{10^{2^3-1}} = \dfrac{1}{10^{8-1}} = 10^{-7}$ : la rapidité de la convergence est impressionnante puisqu'à chaque itération on gagne un facteur environ $10^{-2^{n+1}}$. En fait on double le nombre de décimales à chaque coup…
On se trouve en présence d'une convergence dite *quadratique*.

8. Pour trouver $\sqrt{a}$, il suffit de faire la même chose avec $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_n = \dfrac{a}{u_n}$ puisque si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes, elles ont même limite $l$ telle que $l = \dfrac{a}{l} \Leftrightarrow l^2 = a$. Les démonstrations précédentes peuvent se faire de manière identique, ça marche bien.

L'algorithme présenté ici débouche sur bon nombre de problèmes dont certains sont très actuels : on l'utilise par exemple pour calculer les décimales de $\pi$, c'est l'algorithme de Brent et Salamin. Il s'agit essentiellement de l'algorithme de la *moyenne arithmético-géométrique* étudié par Lagrange puis par Gauss au 19ème siècle.

## 1. 20. Suites adjacentes : aire sous une courbe

**Etude de l'aire sous une courbe à l'aide de suites**

*Objectifs :*

Comprendre comment on peut encadrer l'aire sous une courbe par deux suites, comprendre les notations associées, savoir écrire le terme général des suites, prouver qu'elles ont l'aire comme limite commune (l'existence de l'aire est ici admise).

Application à deux exemples.

*Remarques :*

L'énoncé ci-dessous est un peu long pour être proposé tel quel à une classe. Par contre, il est possible d'en exploiter des parties avec des élèves sous la forme d'un TP encadré et commenté (surtout pour les notations) par le professeur .

$f$ est une fonction continue monotone positive définie sur [0 ; 1] et (C) est la courbe représentant $f$ dans un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$. On note $A$ le point tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$.

On s'intéresse à l'aire **A** du domaine **D** délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Pour approcher **A**, on utilise les suites $u$ et $v$ définies ainsi :

- le segment $[OA]$ est partagé en $n$ segments de même longueur ($n \ge 1$) ;
- conformément aux figures ci-dessous, on construit :
  * les $n$ rectangles $R_{k,\ 0\le k\le n-1}$ situés sous la courbe (C), ayant comme base un des segments de la subdivision et un sommet sur la courbe (C) ;
  * les $n$ rectangles $S_{k,\ 0\le k\le n-1}$ contenant la courbe (C), ayant comme base un des segments de la subdivision et un sommet sur la courbe (C);
- $u_n$ est la somme des aires des $n$ rectangles $R_{k,\ 0\le k\le n-1}$ ;

- $v_n$ est la somme des aires des $n$ rectangles $S_{k,\ 0\leq k\leq n-1}$ ;

La monotonie de $f$ assure que : $u_n \leq \mathbf{A} \leq v_n$ pour tout $n \geq 1$.

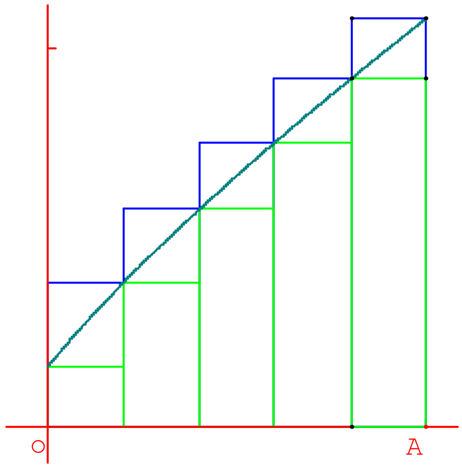



Figure 1

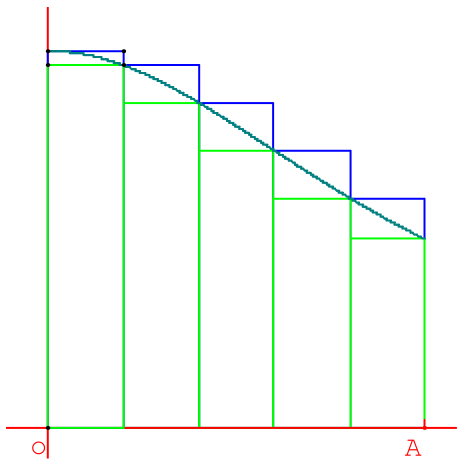



Figure 2

**Partie A - Etude des notations**

1. On note $A_0 = O$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les points de $[OA]$ correspondant à sa subdivision en $n$ segments de même longueur.

a. Sur les figures 1 et 2 ci-dessus où $n = 5$, placer les points $A_k$ pour $k \in \{0,1, \ldots ,5\}$.

b. On reprend $n$ quelconque. Quel point de la suite est confondu avec $A$ ?

c. Quelle est la longueur d'un segment $[A_kA_{k+1}]$, $k \in \{0,1, \ldots ,n-1\}$ ?

d. Quelle est l'abscisse du point $A_k$ , $k \in \{0,1, \ldots ,n\}$ ?

2. On note $B_0, B_1, B_2, \ldots , B_n$ les points de (C) d'abscisses respectives $0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots , 1$.

a. Sur les figures 1 et 2 ci-dessus où $n = 5$, placer les points $B_k$ pour $k \in \{0,1, \ldots ,5\}$.

On reprend $n$ quelconque. Quelles sont les coordonnées de $B_k$ , $k \in \{0,1, \ldots ,n\}$ ?

3. Sur les figures 1 et 2 ci-dessus :

a. Indiquer les rectangles $R_k$ et $S_k$ pour $k \in \{0,1, \ldots ,4\}$.

b. Colorier la surface correspondant à l'aire $u_n$.

c. Dans une couleur différente de celle du b. colorier la surface correspondant à $v_n - u_n$.

**Partie B – Etude des suites *u* et *v***

1. Dans cette question, on suppose que $f$ est croissante sur [0 ; 1] (figure 1).

a. Prouver que $v_n - u_n = \dfrac{1}{n}(f(1) - f(0))$ (on pourra par exemple « empiler » tous les petits rectangles coloriés pour $v_n$ - $u_n$ ).

b. Quelle est la hauteur du rectangle $R_k$ pour $k \in \{0,1, \ldots ,n-1\}$ ?

c. Quelle est l'aire du rectangle $R_k$ ? En déduire une écriture de $u_n$.

2. Dans cette question, on suppose que $f$ est décroissante sur [0 ; 1] (figure 2).

a. Prouver que $v_n - u_n = \dfrac{1}{n}(f(0) - f(1))$.

B. 1. $v_n$ - $u_n$ est la somme des aires des petits rectangles coloriés sur la figure. En « empilant » ces rectangles, on obtient un rectangle de base $\frac{1}{n}$ et de hauteur $f(1) - f(0)$. Donc $v_n - u_n = \frac{1}{n}(f(1) - f(0))$.

Hauteur de $R_k$ = $f\left(\frac{k}{n}\right)$ ; aire de $R_k$ = $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right)$. $u_n$ = aire de $R_0$ + aire de $R_1$ + … + aire de $R_{n-1}$ = $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{0}{n}\right) + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots \frac{1}{n} \times f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

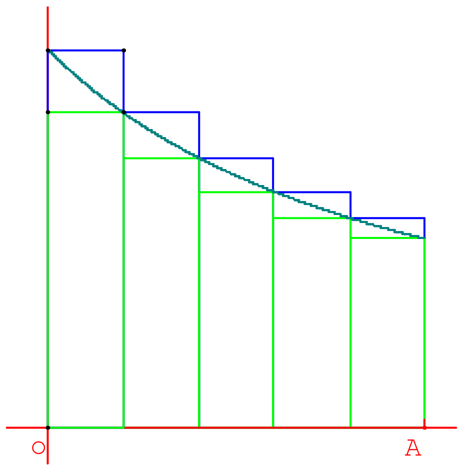
2. En « empilant » les rectangles correspondant à $v_n - u_n$, on obtient un rectangle de base $\frac{1}{n}$ et de hauteur $f(0) - f(1)$. Donc $v_n - u_n = \frac{1}{n}(f(0) - f(1))$.

Hauteur de $S_k$ = $f\left(\frac{k}{n}\right)$ ; aire de $S_k$ = $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right)$. $v_n$ = aire de $S_0$ + aire de $S_1$ + … + aire de $S_{n-1}$ = $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{0}{n}\right) + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots \frac{1}{n} \times f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

3. $u_n \leq \mathbf{A} \leq v_n$ donc $0 \leq \mathbf{A} - u_n \leq v_n - u_n$ et $u_n - v_n \leq \mathbf{A} - v_n \leq 0$.

Or $|v_n - u_n| = \frac{1}{n}|f(0) - f(1)|$ donc $\lim_{n \to +\infty} |u_n - v_n| = 0$. Par conséquent, d'après le « théorème des gendarmes », $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{A} - u_n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{A} - v_n = 0$. D'où $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = \mathbf{A}$.

C. 1.




2. Aire de $S_k$ = $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{\frac{k}{n} + 1} = \frac{1}{k+n}$ donc $v_n$ = aire de $S_0$ + aire de $S_1$ + … + aire de $S_{n-1}$ = $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n-2} + \frac{1}{n+n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1}$.

$v_n - u_n = \frac{1}{n}(f(0) - f(1)) = \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2n}$.

Donc $u_n = v_n - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$.

3. $v_n - u_n = \frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{2n} = 0{,}01$ pour $n = 50$.

Excel donne $u_{50} \simeq 0{,}688172179$ et $v_{50} \simeq 0{,}698172179$.

***Remarques***

* Evidemment **A**= ln 2, mais deux sommes de $n$ termes ($u_n$ et $v_n$) ne donnent un encadrement de **A** que d'amplitude $\frac{1}{2n}$. Ce n'est pas très efficace(croissance très lente de la série harmonique) pour calculer ln 2.

* En fait, les suites $u$ et v sont adjacentes, mais il est assez pénible de prouver que $u$ est croissante et que $v$ est décroissante :

$$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\ \dots\ +\frac{1}{2(n+1)-1}+\frac{1}{2(n+1)}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ \dots\ +\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{2(n+1)+(2n+1)-2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)}=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}>0.$$

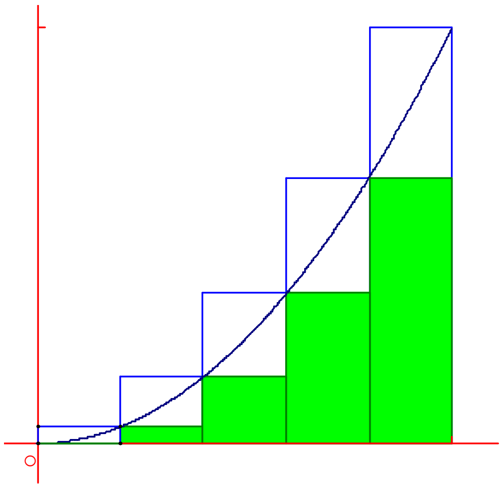
$$v_{n+1}-v_n=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ \dots\ +\frac{1}{2(n+1)-2}+\frac{1}{2(n+1)-1}\right)-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ \dots\ +\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-1}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ \dots\ +\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ \dots\ +\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-1}\right)=$$

$$\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}=\frac{(2n+1)+2n-2(2n+1)}{2n(2n+1)}=-\frac{1}{2n(2n+1)}<0.$$

C'est donc long et nous avons vu que le seul intérêt de prouver que les suites sont adjacentes est que cela permettrait d'établir l'existence de l'aire.

D. 1.




2. Aire de $R_k = \frac{1}{n}\times f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\times\left(\frac{k}{n}\right)^2=\frac{k^2}{n^3}$.

3. $u_n$ = aire de $R_0$ + aire de $R_1$ + … + aire de $R_{n-1}$ = $\frac{0^2}{n^3}+\frac{1^2}{n^3}+\dots+\frac{(n-1)^2}{n^3}=\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\dots+(n-1)^2)$.

4. $1^2+2^2+\dots n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout $n\geq 1$. Donc

$u_n=\frac{1}{n^3}\times\frac{(n-1)\times n\times(2(n-1)+1)}{6}=\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{6n^2}=\frac{1}{3}$.

Pour tout $n\geq 1$, $v_n-u_n=\frac{1}{n}\left(f(1)-f(0)\right)=\frac{1}{n}$, donc $v_n=u_n+\frac{1}{n}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{3}$.

6. Comme $u_n \leq \mathbf{A} \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$, on en déduit $\mathbf{A} = \frac{1}{3}$.

***Remarque***

Ici aussi, les deux suites $u$ et $v$ sont adjacentes. Pour le démontrer, il faudrait établir que $u$ est croissante et que $v$ est décroissante.

C'est faisable car pour $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{3n^2 + n - 1}{6n^2(n+1)^2} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = \frac{-3n^2 - 5n - 1}{6n^2(n+1)^2} < 0$, mais les calculs sont difficiles. De plus, ici, c'est tout à fait inutile car la convergence des suites $u$ est $v$ vers un même nombre est immédiate et prouve donc l'existence de l'aire, dont on obtient en plus la valeur exacte.

1. 21. Suites adjacentes : le principe de la dichotomie

## Le principe de la dichotomie

** On admet la propriété des suites adjacentes : Si u est une suite croissante et v une suite décroissante telles que (v – u) converge vers 0, alors u et v convergent vers une même limite l.*

*On en déduit que l est l'unique réel tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l \leq v_n$.

** Méthode de dichotomie :*

*$I_0$ est un intervalle fermé borné. On le partage en deux intervalles fermés de longueurs égales I et I'.*

*On choisit l'un d'entre eux noté $I_1$, sur lequel on effectue à nouveau cette opération.*

*On construit ainsi par récurrence une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles.*

** Il s'agit de prouver qu'il existe un unique réel appartenant à tous les intervalles $I_n$.*

Preuve :

On définit deux suites $a$ et $b$ :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = [a_n \; ; \; b_n]$ (avec $a_n \leq b_n$), $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, $I_n^{'} = [a_n \; ; \; c_n]$ et $I_n^{''} = [c_n \; ; \; b_n]$.

Si on choisit $I_{n+1} = I_n^{'}$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, sinon on choisit $I_{n+1} = I_n^{''}$, et donc $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

On prouve que les deux suites $a$ et $b$ sont adjacentes :

* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$, donc la suite $(b - a)$ est géométrique, de raison $\frac{1}{2}$. Elle converge donc vers 0.

* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$, donc $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Par conséquent, $a$ est croissante et $b$ est décroissante .

* Les deux suites $a$ et $b$ sont donc adjacentes.

Conséquences :

Les deux suites $a$ et $b$ convergent vers une limite commune $l$ et $l$ est l'unique nombre réel tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq l \leq b_n$, c'est à dire $l \in I_n$.

*Démonstration du théorème de la convergence monotone à l'aide de la méthode de dichotomie :*

* On a déjà prouvé que si une suite d'intervalles $I_n = [a_n \; ; \; b_n]$ a été construite par dichotomie, les deux suites $a$ et $b$ convergent vers un même réel $l$.

** Il s'agit de démontrer que toute suite croissante majorée est convergente.*

*Preuve*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée par un réel $M$. On construit par récurrence la suite d'intervalles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie ainsi :

* $I_0=[u_0\ ;\ M]$ ;

* Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $I_n=[a_n\ ;\ b_n]$, $c_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$, $I_n'=[a_n\ ;\ c_n]$ et $I_n''=[c_n\ ;\ b_n]$. Si $I_n''$ contient un terme de la suite $u$, alors $I_{n+1}=I_n''$ sinon $I_{n+1}=I_n'$.

La suite d'intervalles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant été construite par dichotomie, les deux suites $a$ et $b$ convergent vers un même réel $l$.

Par récurrence, chaque intervalle $I_n$ contient tous les termes de la suite $u$ à partir d'un certain rang $p_n$ :

* $I_0=[u_0\ ;\ M]$ contient tous les termes de la suite $u$ à partir du rang $0=p_0$.
* Supposons que $I_n$ contienne tous les termes de la suite $u$ à partir d'un certain rang $p_n$. Alors :

- ou bien $I_n''$ contient un terme $u_p$ de $u$, donc $I_{n+1}=I_n''$ ; comme $u$ est croissante, $I_n'$ contient au plus les termes $u_n$ pour $n\in\{0,1,\dots,p-1\}$. Donc $I_{n+1}$ contient les mêmes termes de $u$ que $I_n$, sauf peut-être certains des $p$ premiers, et par conséquent contient tous les termes de la suite $u$ à partir d'un certain rang $p_{n+1}$ ;
- ou bien $I_n''$ ne contient pas de terme de u, donc $I_{n+1}=I_n'$. Dans ce cas, $I_{n+1}$ contient les mêmes termes de $u$ que $I_n$, donc tous à partir du rang $p_n=p_{n+1}$.

* Par conséquent, chaque intervalle $I_n$ contient tous les termes de $u$ à partir d'un certain rang $p_n$.

On maintenant prouve que la suite $u$ converge vers $l$ :

Soit $I$ un intervalle ouvert contenant $l$.

Comme $l=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$, il existe un rang $N$ pour lequel $a_N$ et $b_N$ sont dans $I$, donc $I_N\subset I$.

Or $I_N$ contient tous les termes de la suite $u$ à partir d'un certain rang $p_N$. A partir de ce rang, tous les termes de la suite $u$ sont aussi dans $I$. Donc la suite $u$ converge vers $l$.

## 1. 22. Ln et méthode de Newton-Raphson, Asie 2000

*11 points*

### Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction $f$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x)=1+\dfrac{\ln x}{x}$.

Soit (C) la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ ; unité graphique : 5 cm.

1. Calculer les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$. Déterminer les asymptotes de (C).

2. Étudier le sens de variation de $f$. Dresser le tableau de variation de $f$.

3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet sur l' intervalle $\left[\dfrac{1}{e}\,;1\right]$ une solution unique, notée $\alpha$.

Déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.

Donner, suivant les valeurs de $x$, le signe de $f(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

4. Tracer la courbe (C).

### Partie B : Calcul d'aire

1. Déterminer une équation de la tangente (D) à (C) au point d'abscisse 1.

2. a. Soit $\varphi$ la fonction définie, pour tout $x>0$, par : $\varphi(x)=x-x^2+\ln x$. Calculer $\varphi'(x)$.

En déduire le sens de variation de $\varphi$, puis le signe de $\varphi(x)$, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x)-x=\dfrac{\varphi(x)}{x}$.

c. En déduire la position relative de (C) et de (D).

3. On considère le domaine limité sur le graphique par l'axe des abscisses, la courbe (C) et la tangente (D).

a. Hachurer ce domaine.

b. Soit $A$ son aire, en cm². Écrire la valeur exacte de $A$ comme expression polynomiale du second degré en $\alpha$.

<u>Partie C : Étude d'une suite</u>

Soit $x_0$ un réel appartenant à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{e}\,;\alpha\right]$. On note $M_0$ le point de (C) d'abscisse $x_0$.

1. a. Donner une équation de la tangente ($T_0$) à (C) en $M_0$, en fonction de $x_0$, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

b. Soit $x_1$ l'abscisse du point d'intersection de ($T_0$) avec l'axe des abscisses.

Écrire $x_1$ en fonction de $x_0$, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

2. On considère la fonction $h$ définie sur $\left]\dfrac{1}{e}\,;\alpha\right]$ par : $h(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. (On remarquera que $h(x_0) = x_1$).

a. Montrer que $h'(x)=\dfrac{f''(x)\times f(x)}{\left[f(x)\right]^2}$.

b. Calculer $f''(x)$ et étudier son signe sur $\left]\dfrac{1}{e}\,;\alpha\right]$.

c. En déduire que $h$ est strictement croissante sur $\left]\dfrac{1}{e}\,;\alpha\right]$, puis montrer que $x_1<\alpha$.

d. En écrivant $h(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, étudier le signe de $h(x)-x$ sur $\left]\dfrac{1}{e}\,;\alpha\right]$. En déduire que $\dfrac{1}{e}<x_0<x_1<\alpha$.

3. a. Démontrer que, pour tout $x$ appartenant à $\left]\dfrac{1}{e}\,;\alpha\right]$ $h(x)$ appartient à $\left]\dfrac{1}{e}\,;\alpha\right]$.

b. On considère la suite $(x_n)$ de réels définie par $x_0$ et $x_{n+1}=h(x_n)$ pour tout entier naturel $n$.

Montrer que la suite $(x_n)$ est strictement croissante.

**<u>Correction</u>**

<u>Partie A : Étude d'une fonction $f(x)=1+\dfrac{\ln x}{x}$.</u>

1. Limite de $f$ en 0 : on écrit $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{1}{x}\times\ln x$ d'où la limite est $-\infty$. En $+\infty$ $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 donc $f$ tend vers 1.

2. $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ qui est positif lorsque $x\le e$. $f(e)=1+\dfrac{1}{e}$.

3. Sur l' intervalle $\left[\dfrac{1}{e}\,;1\right]$ $f$ est croissante vers l'intervalle $\left[1-\dfrac{1}{e}\,;1\right]$ qui contient 0 : $f(x)=0$ a donc une solution unique $\alpha$. La machine donne 0,567 comme valeur approchée de $\alpha$.

Comme $f$ est croissante, $f(x)\le 0$ lorsque $x\le\alpha$ et $f(x)\ge 0$ lorsque $x\ge\alpha$.

Partie B : Calcul d'aire

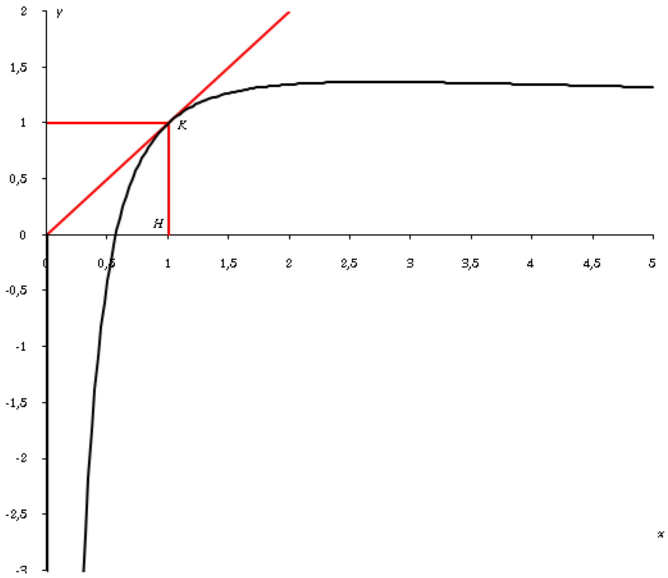
1. (D) $y=f'(1)(x-1)+f(1)=x-1+1=x$.

2. a. $\varphi(x)=x-x^2+\ln x$ ; $\varphi'(x)=1-2x+\frac{1}{x}=\frac{1+x-2x^2}{x}=\frac{(-2x-1)(x-1)}{x}$ : positif lorsque $x\le 1$, négatif sinon. $\varphi(1)=0$ donc $\varphi(x)\le\varphi(1)=0$.

b. $f(x)-x=1+\frac{\ln x}{x}-x=\frac{x+\ln x-x^2}{x}=\frac{\varphi(x)}{x}$.

c. La position relative de (C) et de (D) est donnée par le signe de $f(x)-x$ donc (C) est toujours en dessous de (D).

3. a.




b. Il faut d'abord calculer l'intégrale $I=\int_\alpha^1 f(x)\,dx=\int_\alpha^1 1+\frac{1}{x}\ln x\,dx=\left[x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_\alpha^1=1-\alpha-\frac{1}{2}(\ln\alpha)^2$ ; comme $f(\alpha)=0$, on a $\ln(\alpha)=-\alpha$ d'où en remplaçant : $I=1-\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2$. Par ailleurs il faut soustraire cette intégrale à l'aire du triangle OKH qui vaut $\frac{1}{2}$, et multiplier le tout par l'unité d'aire, soit 25 cm$^2$.

Finalement $A=25\left(\frac{1}{2}-1+\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2\right)=\frac{25}{2}\left(\alpha^2+2\alpha-1\right)$.

Partie C : Étude d'une suite

Soit $x_0$ un réel appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{e};\alpha\right]$. On note $M_0$ le point de (C) d'abscisse $x_0$.

1. a. (T$_0$) : $f'(x_0)=\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}$ ; $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=xf'(x_0)+f(x_0)-x_0f'(x_0)$.

b. Lorsqu'on fait $y=0$ dans l'équation précédente, on trouve

$$0=xf'(x_0)+f(x_0)-x_0f'(x_0)\Leftrightarrow x=\frac{x_0f'(x_0)-f(x_0)}{f'(x_0)}=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=x_1.$$

2. On considère la fonction $h$ définie sur $\left]\frac{1}{e}\,;\alpha\right]$ par : $h(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. (On remarquera que $h(x_0)=x_1$).

a. $h(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\Rightarrow h'(x)=1-\frac{f'(x)\times f'(x)-f''(x)\times f(x)}{\left[f'(x)\right]^2}=\frac{\left[f'(x)\right]^2-\left[f'(x)\right]^2+f''(x)\times f(x)}{f''(x)\times f(x)}$,

soit $h'(x)=\frac{f''(x)\times f(x)}{\left[f(x)\right]^2}$.

b. $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-3x+2x\ln x}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$. $\quad -3+2\ln x\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{3}{2}$ donc sur $\left]\frac{1}{e}\,;\alpha\right]$, $f''(x)<0$.

c. $f$ est également négative sur cet intervalle donc $h'$ est positive et $h$ est croissante.

On a $h(\alpha)=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}=\alpha$ et $x_1=h(x_0)$.

Comme $x_0<\alpha$ et que $h$ est croisssante, on a donc bien $h(x_0)<h(\alpha)\Leftrightarrow x_1<\alpha$.

d. $h(x)-x=-\frac{f(x)}{f'(x)}$ est positive sur $\left]\frac{1}{e}\,;\alpha\right]$ car $f'$ est positive et $f$ est négative.

Enfin on a $\frac{1}{e}<x_0$ et $h(x_0)-x_0=x_1-x_0>0\Rightarrow x_1>x_0$, soit $\frac{1}{e}<x_0<x_1<\alpha$.

3. a. Nous venons de montrer que pour un $x_0$ dans $\left]\frac{1}{e}\,;\alpha\right]$ alors $x_1=h(x_0)$ est dans $\left]\frac{1}{e}\,;\alpha\right]$. C'est ok.

b. Par récurrence : $x_2=h(x_1)$ est alors tel que $\frac{1}{e}<x_0<x_1<x_2<\alpha$, etc. Le raisonnement fait en $x_0$ est le même à n'importe quel rang.

Donc la suite $(x_n)$ est strictement croissante. Comme elle est majorée par $\alpha$, elle converge. Il faudrait encore montrer qu'elle converge vers $\alpha$, ce que l'on voit en faisant le calcul : la rapidité de convergence est même spectaculaire.

| $n$ | $x_n$ | $n$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,367879441171442000000 | 4 | 0,567142611556756000000 |
| 1 | 0,484151520138857000000 | 5 | 0,567143290408712000000 |
| 2 | 0,551836150605472000000 | 6 | 0,567143290409784000000 |
| 3 | 0,566602948532105000000 | 7 | 0,567143290409784000000 |

Cette méthode est très performante ; elle fut inventée par Newton et améliorée par J. Raphson quelques années plus tard. C'est celle que l'on utilise en général dans les logiciels de calcul.

1. 23. ROC+suite solution équation, Polynésie 2005

7 points

La page annexe sera à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve.

**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty\,[$ par $f(x)=x+\ln x$.

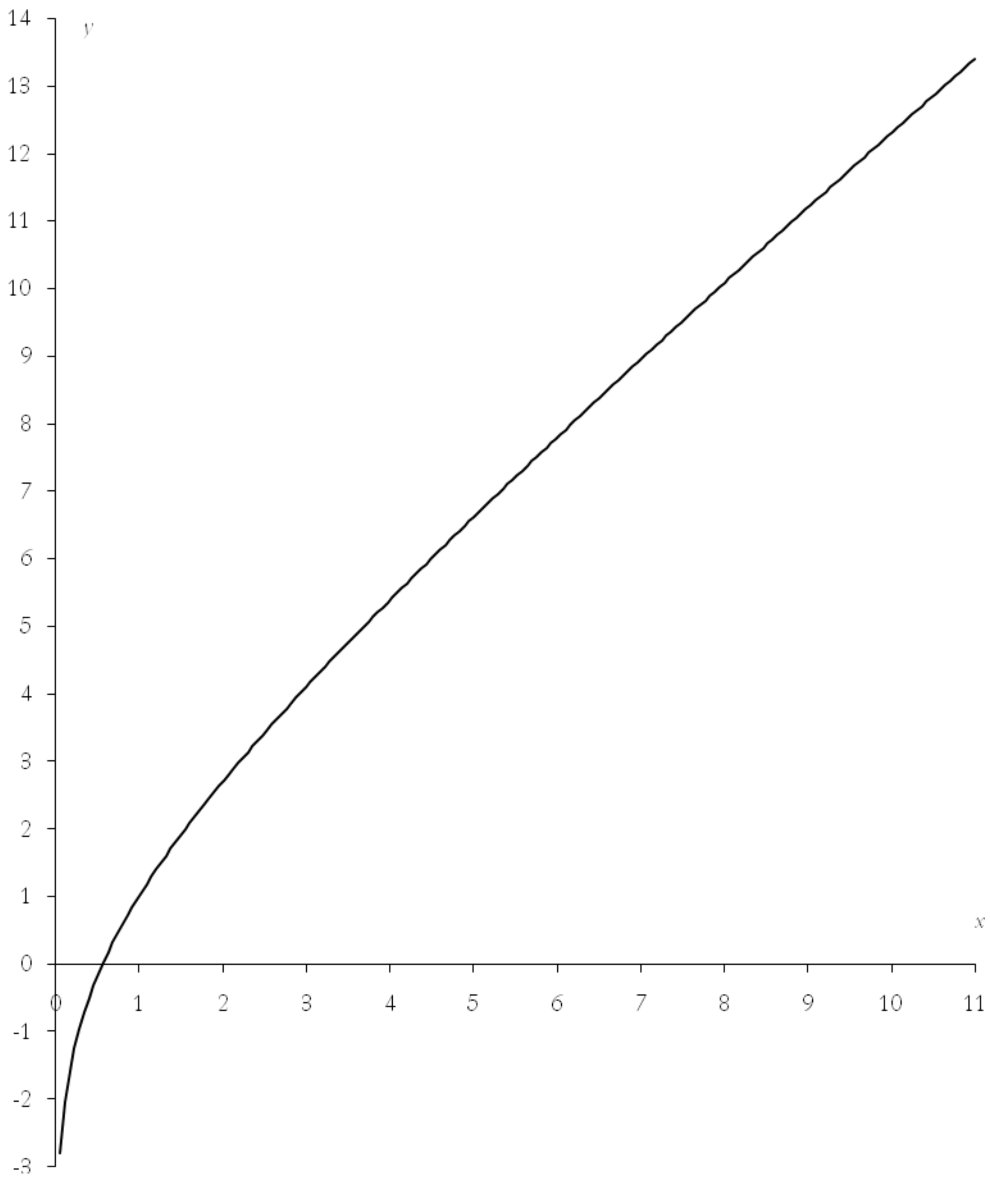
On nomme $\Gamma$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. a. Déterminer les limites de la fonction $f$ aux bornes de son intervalle de définition.
b. Montrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty\ [$.
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0\ ;\ +\infty\ [$.
On note $\alpha_n$ cette solution. On a donc : pour tout entier naturel $n$, $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.
b. Sur la page annexe, on a tracé $\Gamma$ dans le repère $(O\ ;\vec{i}, \vec{j})$.
Placer les nombres $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ et $\alpha_5$ sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.
c. Préciser la valeur de $\alpha_1$.
d. Démontrer que la suite $(\alpha_n)$ est strictement croissante.
3. a. Déterminer une équation de la tangente $\Delta$ à la courbe $\Gamma$ au point $A$ d'abscisse 1.
b. Étudier les variations de la fonction $h$ définie sur $]0\ ;\ +\infty\ [$ par $h(x) = \ln x - x + 1$.
En déduire la position de la courbe $\Gamma$ par rapport à $\Delta$.
c. Tracer $\Delta$ sur le graphique de la page annexe. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $\dfrac{n+1}{2} \leq \alpha_n$.
4. Déterminer la limite de la suite $(\alpha_n)$.

Partie B

On considère une fonction $g$ continue, strictement croissante sur $]0\ ;+\infty\ [$ et telle que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$.
On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la **partie A**, définir sur $\mathbb{N}$ une suite $(\beta_n)$ de réels tels que $g(\beta_n) = n$, et que cette suite est strictement croissante.
1. Démonstration de cours :
Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.
« Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel $A$, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à $A$ ».
Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
2. Montrer que la suite $(\beta_n)$ tend vers $+\infty$.

Page annexe




**Correction**

**Partie A** $f(x) = x + \ln x$.

1. a. En $+\infty$ les deux termes tendent vers $+\infty$ donc $f$ tend vers $+\infty$ ; en $0^+$ $\ln x$ tend vers $-\infty$ donc $f$ également.

b. $x$ est croissante, ln est croissante, la somme de deux fonctions croissantes est croissante. Sinon on a facilement $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 0$.

2. a. $f$ est continue, monotone croissante de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ ; elle est donc bijective et toutes les valeurs $n$ entières sont atteintes. A chaque $n$ correspond donc un unique antécédent $\alpha_n$ avec $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.

b. On part des valeurs entières 1, 2, 3, 4 et 5 sur l'axe des ordonnées et on trace.

c. $\alpha_1$ : $\alpha_1 + \ln \alpha_1 = 1$ ; cette équation a l'unique solution 1 : $1 + \ln 1 = 1$.

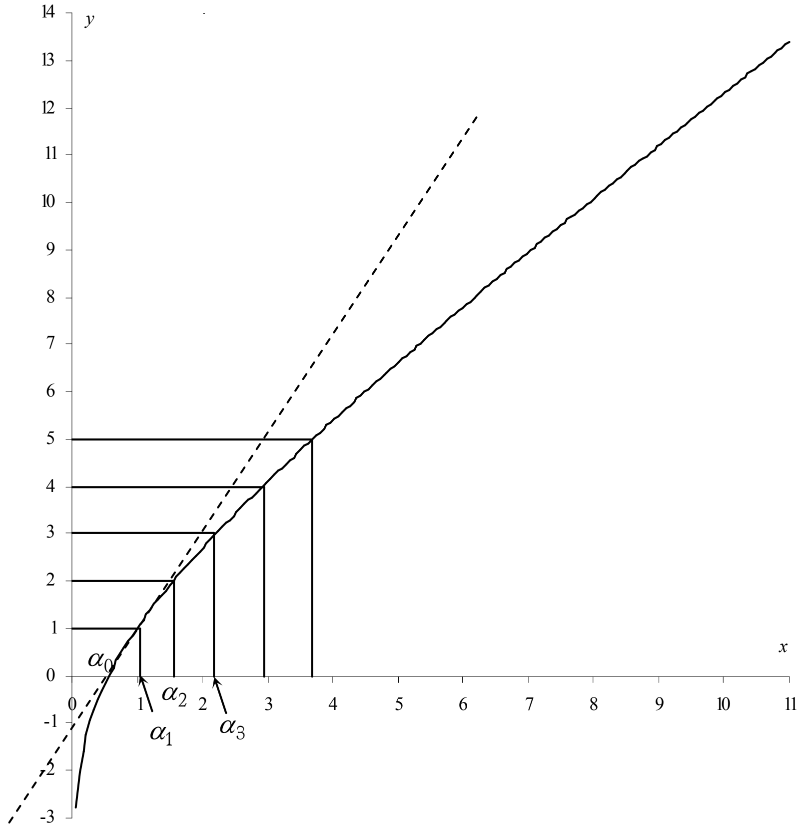
d. Comme $f$ est croissante et que $n+1 > n$ , alors les antécédents $\alpha_n$ et $\alpha_{n+1}$ sont rangés dans le même ordre : $\alpha_n \le \alpha_{n+1} \Leftrightarrow f(\alpha_n) \le f(\alpha_{n+1}) \Leftrightarrow n \le n+1$.

3. a. $f'(1)=1+\frac{1}{1}=2$ et $f(1)=1$ d'où l'équation de $\Delta$ : $y=2(x-1)+1=2x-1$.

b. $h(x) = \ln x - x + 1$, $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$ est positif lorsque $x < 1$, négatif lorsque $x > 1$. On a $h(1)=0$ donc $h$ est croissante avant 1, décroissante après 1 d'où $h(x)\le h(1)=0$. La position de $\Gamma$ par rapport à $\Delta$ est donnée par le signe de $f(x)-(2x-1)=x+\ln x-2x+1=\ln x-x+1=h(x)$, donc $\Gamma$ est toujours en dessous de $\Delta$.

c. Comme $h(x)\le 0$ pour $x>1$, ceci est valable pour $\alpha_n$ : $f(\alpha_n)-2\alpha_n+1\le 0 \Leftrightarrow n-2\alpha_n+1\le 0 \Leftrightarrow \alpha_n \ge \frac{n+1}{2}$.

4. Comme $n$ tend vers $+\infty$, $\frac{n+1}{2}$ également et $\alpha_n$ également.




Partie B

$g$ continue, strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

1. Démonstration de cours : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

*Démonstration par l'absurde* : si $(u_n)$ est croissante non majorée et qu'elle tend vers une limite $L$, alors il arriverait un moment (une valeur $N$ de $n$) où $u_N < L-\varepsilon$ où $\varepsilon$ est un réel positif choisi arbitrairement (aussi petit qu'on le veut) ; si le terme suivant est supérieur à $L-\varepsilon$, la suite ne converge pas vers $L$ et si le terme suivant reste inférieur à $L$, la suite est majorée. Dans les deux cas il y a contradiction.

*Démonstration directe* : si $(u_n)$ est non majorée, pour tout $A$ réel il existe une valeur $N$ de $n$ pour laquelle $u_N \ge A$ ; comme $(u_n)$ est croissante, pour toutes les valeurs de $n$ supérieures à $N$, on a $u_n \ge A$. La définition précédente est respectée, $(u_n)$ tend bien vers $+\infty$.

2. La suite $(\beta_n)$ est croissante pour les mêmes raisons que $(\alpha_n)$ ; comme $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et que $g(\beta_n)=n$, les termes $\beta_n$ sont comme $x$ et tendent donc vers l'infini.

De manière plus élégante on peut considérer que $g$ est bijective et a une application réciproque $g^{-1}$ qui est telle que $\lim_{y\to+\infty} g^{-1}(y)=+\infty$ d'où $\lim_{n\to+\infty} g^{-1}(n)=\lim_{n\to+\infty}\beta_n=+\infty$.