Généralités

☞ **Exercice 1.** *Convergence.*
Calculer, si elles existent, les limites des suites suivantes :

a. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

b. $u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

c. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

d. $u_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

☞ **Exercice 2.** *Suite d'entiers.*
Montrer qu'une suite de nombres entiers convergente est **stationnaire** *ie* constante à partir d'un certain rang.

☞ **Exercice 3.** *Suites adjacentes.*

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$

☞ **Exercice 4.** *Caractérisation séquentielle de la borne sup.*
Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$ et M un réel.

1. Montrer que :
$$M = \sup(A) \Longleftrightarrow \begin{cases} M \text{ majore } A \\ \exists (x_n) \subset A,\ \lim(x_n) = M \end{cases}$$
2. Enoncer un résultat analogue pour $\inf(A)$.

☞ **Exercice 5.** *Suites des indices pairs et des indices impairs.*
Soit (u_n) une suite réelle. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite l alors (u_n) converge aussi vers l.

Exercice 6. *Suite géométrique complexe.*
Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_n = q^n$ avec $q \in \mathbb{C}$. Montrer que u converge vers 0 si et seulement si $|q| < 1$.

Exercice 7. *Monotonie.*
Etudier la monotonie des suites suivantes :

a. $u_n = e^{\frac{\ln(n)}{n}}$

b. $u_n = \sqrt{n} - 8\ln(n)$

c. $u_n = n^2 e^{-n}$

d. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

e. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - n$

Exercice 8. *Convergence.*
Etudier la convergence des suites suivantes :

a. $u_n = n\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)$

b. $u_n = \sqrt{n^4+n^2+n} - n^2 - n$

c. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

d. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

e. $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

f. $u_n = \ln(n)^{\frac{1}{n}}$

g. $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3$

h. $u_n = \frac{4}{3-2^n}$

i. $u_n = \frac{n+\sin(n)}{n^2+1}$

j. $u_n = \cos(n) - n$

k. $u_n = \ln(n) + (-1)^n$

l. $u_n = n\cos(n) + 2n$

m. $u_n = (-1)^n\cos(n) + n^2$

n. $u_n = (-1)^n\sqrt{2n+1} - n$

o. $u_n = \sqrt{n+1}\cos(n) - n$

Exercice 9. *Suites adjacentes.*
Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

a. $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}$

b. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

Exercice 10. *Suites récurrentes.*
Etudier la monotonie des suites récurrentes suivantes :

a. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. $u_0 \geq 1$ et $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. *Suites arithmético-géométriques.*
Etudier les suites suivantes :

a. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12. *Suites récurrentes d'ordre 2.*
Exprimer le terme général u_n en fonction de n pour les suites suivantes :

a. $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. $u_0 = 5$, $u_1 = 6$ et $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. $u_0 = 5$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = -9u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13. *Suites convergeant vers 0.*
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

a. Si u vérifie $\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_{n+m} \leq \dfrac{n+m}{nm}$ alors montrer que $\lim(u_n) = 0$.

b. Si u vérifie $\lim \dfrac{u_n}{1+u_n} = 0$ alors montrer que $\lim(u_n) = 0$.

c. Si u est bornée et vérifie $\lim \dfrac{u_n}{1+u_n^2} = 0$ alors montrer que $\lim(u_n) = 0$.

⋆ **Exercice 14.** *Une suite.*
Etudier la convergence de la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Exercice 15.
Soit u et v deux suites à valeurs dans $[0,1]$ et telles que $\lim(u_n v_n) = 1$. Montrer que $\lim(u_n) = 1$ et $\lim(v_n) = 1$.

⋆ **Exercice 16.** *Suite extraite.*
Soit (u_n) une suite réelle croissante telle que (u_{2n}) converge. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 17. *Somme de suites.*
Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq a$ et $v_n \leq b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que si $u+v$ converge vers $a+b$ alors u converge vers a et v converge vers b.

Analyse asymptotique

☞ **Exercice 18.** *Série harmonique.*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$.
2. Donner un équivalent de H_n.
3. Montrer que la suite $v_n = H_n - \ln(n)$ est convergente.

Exercice 19. *Equivalents.*
Donner un équivalent simple des suites suivantes :

a. $u_n = n\left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)$

b. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{2n}\right)$

c. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

d. $u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$

⋆ **Exercice 20.**
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $u_n = s_n - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = s_n - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que u et v sont adjacentes.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
3. En déduire un équivalent de s_n.

⋆ **Exercice 21.**
On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $(E): \ x^n + nx - 1 = 0$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation possède (E) possède une unique solution sur $]0, +\infty[$, notée x_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < x_n < \frac{1}{n}$.
3. Montrer que, $((x_n)^n)$ converge vers 0.
4. En déduire que $x_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 22.
Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par : $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n}$.

1. Montrer que $\lim(u_n) = 0$.
2. En déduire que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

☞ **Exercice 23.**
Soit (u_n) une suite réelle.

a. Montrer que si $u_n = O(n)$ alors $u_n = o(n^2)$.

b. La réciproque est-elle vraie ?