Chapitre 6 : Suites numériques

- Se familiariser avec les bonnes définitions de convergence ou divergence.
- Mobiliser "la" bonne méthode pour montrer qu'une suite converge ou diverge.
- Comparer le comportement de suites à l'infini avec des suites connues.

1 Généralités sur les suites

1.1 Modes de définition d'une suite

Définition 1 (Suite réelle).
On appelle **suite à valeurs réelles** toute application :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$$

En général, on note le **terme général** $u(n) = u_n$ et la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites à valeurs réelles.

Exemple 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 1$.

Exemple 2. $u_0 = 1$ et pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n$.

Exemple 3. On définit u_n comme la solution de $x^n + x^2 + 2x - 1 = 0$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Définition 2 (Opérations sur les suites).
Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit :

- le **produit par un scalaire** $\lambda \in \mathbb{R}$, par $\lambda u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- la **somme** de u et v par $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- le **produit** de u et v par $u \times v = (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- le **quotient** de u par v si v ne s'annule pas, par $\frac{u}{v} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.2 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 3 (Bornes).
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que :

- la suite u est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- la suite u est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
- la suite u est **bornée** si u est majorée et minorée.

Exemple 4. $u_n = \sin(n) - n$ est . . . . par . . . .

Exemple 5. $u_n = \frac{1}{n}$ est . . . . par . . . .

Exemple 6. $u_n = (-1)^n$ est . . . . par . . . .

1.3 Monotonie des suites

Définition 4 (Monotonie des suites).
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que :

- la suite u est **croissante** (resp. **strictement croissante**) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} > u_n$).
- la suite u est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).
- la suite u est **monotone** (resp. **strictement monotone**) si elle est croissante ou décroissante (resp. **strictement**).

Exemple 7. $u_n = \frac{1}{n}$ est . . . .

Définition 5 (Intervalle stable par f).
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On dit que I est **stable par** f si $f(I) \subset I$.

Exemple 8. L'intervalle $[0, 1]$ est stable par $x \longmapsto \frac{x+1}{2}$ et par $x \longmapsto \frac{x+1}{4}$.

2 Suites convergentes

2.1 Limite finie

Définition 6 (Suite convergente)**.**
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est **convergente** si u_n admet une limite finie l quand n tend vers $+\infty$. C'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad |u_n - l| \leq \varepsilon$$

Dans ce cas, on note $\lim(u_n) = l$.

2.2 Opérations sur les limites

3 Suites divergentes

Définition 7 (Suite divergente)**.**
Une suite est dite **divergente** si elle ne converge pas.

Exemple 9. $u_n = (-1)^n$ et $v_n = n+1$ sont divergentes.

3.1 Limite infinie

Définition 8 (Divergence vers l'infini)**.**
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que

- u **diverge vers** $+\infty$ si pour tout $M \in \mathbb{R}$,
$$u_n \geq M.$$
- u **diverge vers** $-\infty$ si pour tout $m \in \mathbb{R}$,
$$u_n \leq m.$$

Exemple 10. $u_n = n+1$.

3.2 Opérations sur les limites

3.3 Théorème de la limite monotone

4 Suites particulières

4.1 Suites arithmétiques et suites géométriques

Définition 9 (Suite arithmétique)**.**
On dit qu'une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est **arithmétique** si $u_0 \in \mathbb{R}$ et s'il existe un réel $b \neq 0$, appelé **raison de** u, tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + b.$$

Exemple 11. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 1$.

Définition 10 (Suite géométrique)**.**
On dit qu'une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est **géométrique** si $u_0 \in \mathbb{R}$ et s'il existe un réel $q \neq 0$, appelé **raison de** u, tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n.$$

Exemple 12. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$.

4.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 11 (Suite arithmético-géométrique)**.**
On appelle **suite arithmético-géométrique** toute suite u définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ et $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tels que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

Exemple 13. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

4.3 Suites adjacentes

Définition 12 (Suites adjacentes)**.**
Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u et v sont **adjacentes** si :

1. l'une des suites est croissante ;
2. l'autre est décroissante ;
3. $\lim(v_n - u_n) = 0$.

Exemple 14. $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n}$ sont adjacentes.

4.4 Suites extraites

Définition 13 (Suite extraite)**.**
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Une **suite extraite** de u est une suite v telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$.

Exemple 15. $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont les suites extraites respectivement des indices paires et des indices impairs.

4.5 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 14 (Suite récurrente linéaire d'ordre 2)**.**
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ fixés. Une **suite récurrente linéaire d'ordre** 2 est une suite u définie par $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

4.6 Suites à valeurs complexes

5 Analyse asymptotique des suites

5.1 Relations de comparaison

Définition 15.
Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que

- u est **dominée par** v et on note $u_n = O(v_n)$ si la suite $\frac{u}{v}$ est bornée ;
- u est **négligeable devant** v et on note $u_n = o(v_n)$ si la suite $\frac{u}{v}$ converge vers 0 ;
- u est **équivalente à** v et on note $u_n \sim v_n$ si la suite $\frac{u}{v}$ converge vers 1.

Exemple 16. $u_n = n$ et $v_n = n^2$. On a : $u_n \ldots\ldots(v_n)$.

Exemple 17. $u_n = n^3$ et $v_n = n^2$. On a : $u_n \ldots\ldots(v_n)$.

Exemple 18. $u_n = 2n - 1$ et $v_n = 2n + 1$. On a : $u_n \ldots\ldots(v_n)$.

5.2 Résultats usuels

5.3 Propriétés des relations de comparaison